



0017-9310(94)00120-0

Modélisation isotherme d'une interface diffusive en convection de double-diffusion

J. P. PULICANI†

Département de Mathématiques, Université de Nice, Parc Valrose, F-06034 Nice cedex, France

(Received for publication 27 April 1994)

Résumé—Une méthode spectrale couplée à une technique de décomposition en sous-domaines est utilisée pour modéliser l'expérience d'une interface *diffusive* en convection de double-diffusion. Le modèle isotherme comporte deux couches de fluide de Boussinesq bidimensionnelles et horizontales qui sont séparées par une interface et qui ont une concentration de sel et de sucre uniforme. Un accord raisonnable a été trouvé à l'issue de comparaisons avec des résultats théoriques et expérimentaux.

1. INTRODUCTION

Les mesures effectuées par les océanographes montrent que les profils verticaux de température et de salinité dans les océans ne sont pas toujours réguliers. On voit souvent apparaître une succession de couches séparées par des interfaces à travers lesquelles les gradients de température et de sel sont assez grands. Les mécanismes responsables d'une telle situation ressortent de phénomènes d'instabilités de double-diffusion. Ces derniers jouent un rôle important, non seulement en océanographie, mais aussi, en géophysique, météorologie et ingénierie pour ne citer que ces trois applications. Ceci a conduit à de nombreuses études expérimentales et théoriques visant à expliquer ces phénomènes. Par contre, les études numériques sur ce sujet sont encore très rares et très partielles. L'exposé et l'analyse d'un certain nombre de travaux sur la convection de double-diffusion (et de multi-diffusion) et ses applications peuvent être trouvés dans Huppert et Turner [1] et Turner [2, 3].

Les mouvements de convection de double-diffusion, peuvent apparaître dans un fluide ayant deux (ou plus) composants qui diffusent à différentes vitesses et qui contribuent au gradient de densité vertical en sens opposé. Que les composants soient la chaleur et le sel, comme dans les océans, ou deux solutés différents, comme en chimie, les aspects qualitatifs de convection de double-diffusion restent les mêmes : seules les échelles de temps et d'espace des mouvements diffèrent. En contraste avec la convection thermique simple (un seul composant) les mouvements convectifs peuvent surgir même quand la masse volumique décroît avec la hauteur, c'est à dire quand elle est statiquement

stable. Ce phénomène est dû aux effets de la diffusion qui a une influence stabilisante en convection thermique simple, mais qui peut agir en double-diffusion de manière à relâcher l'énergie potentielle stockée dans un des composants pour la convertir en énergie cinétique. Pour qu'il y ait de la convection de double-diffusion, un des composants doit être distribué de manière instable dans le fluide pour fournir une source d'énergie pour le mouvement tandis que l'autre doit être distribué de façon stable pour maintenir partout une stratification stable de la densité. Dans une telle situation apparaît une succession de couches dans lesquelles les composants sont presque uniformes, et qui sont séparées par des interfaces pouvant prendre deux formes. Si le composant qui diffuse le plus lentement est distribué de manière instable, les couches sont séparées par des zones où la convection peut prendre la forme de longues et fines colonnes de fluide alternativement ascendantes et descendantes appelées *fingers*. Si le composant qui diffuse le plus vite est distribué de façon instable, les couches sont séparées par de fines interfaces dites *diffusives* à travers lesquelles les gradients des composants sont très importants. C'est ce dernier cas qui est étudié dans le présent article.

L'interface diffusive en convection de double-diffusion a fait l'objet de nombreuses études expérimentales. Citons par exemple les travaux de Turner [4], Shirtcliffe [5, 6], Crapper [7], Marmorino et Caldwell [8], Takao et Narusawa [9] et Fernando [10]. Un certain nombre d'études théoriques, fondées sur les observations en laboratoire, ont aussi été entreprises, soit pour expliquer ses mécanismes, soit pour comprendre son apparition. Linden et Shirtcliffe [11] ont présenté un modèle pour expliquer les transferts possibles des composants à travers les interfaces séparant ces couches. Gough et Toomre [12] utilisent des équations à un seul mode pour prédire des flux observés en laboratoire. En convection thermosaline,

†Adresse actuelle : Département de Mathématiques et Mécanique, Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme, Case 322, Av. Escadrille Normandie-Niemen, F-13397 Marseille cedex 20, France.

NOMENCLATURE

\tilde{F}_{SP}	flux qui normalise \tilde{F}_T , voir équation (15)	T_1, S_1	valeurs minimales de \tilde{T} et \tilde{S}
F_T^*	flux de \tilde{T} adimensionné, voir équation (16)	T_2, S_2	valeurs maximales de \tilde{T} et \tilde{S}
$\tilde{F}_T, F_T, \tilde{F}_S, F_S$	flux de \tilde{T}, T, \tilde{S} et S à travers l'interface	T_b, S_b	valeurs moyennes de T et S dans la couche de fluide inférieure
g	accélération de la pesanteur	t_f, t_i	temps final, temps initial (sans dimension)
H, L, A	demi-hauteur, longueur, allongement (L/H) de la cavité	T_h, S_h	valeurs moyennes de T et S dans la couche de fluide supérieure
h_T	épaisseur de l'interface	T_{m-}, T_{m+}	concentrations moyennes de T sur les frontières $y = -1$ et $y = +1$
N_F	nombre de modes de Fourier multiplié par deux	$\tilde{u}, u, \tilde{v}, v$	composantes horizontales et verticales de la vitesse (réelles et adimensionnelles)
N_j	nombre de polynômes de Tchébychev lié au sous-domaine Ω_j	U_{max}	maximum de la valeur absolue de u
N_{TC}	nombre de polynômes de Tchébychev total, $N_{TC} = N_1 + N_2 + N_3$	V_{max}	maximum de la valeur absolue de v
\bar{N}_T, \bar{N}_S	nombres de Nusselt moyens de T et S à travers une horizontale	y_i	ordonnée adimensionnelle de la frontière inférieure de l'interface
Pr	nombre de Prandtl, ν/κ_T	y_s	ordonnée adimensionnelle de la frontière supérieure de l'interface
Ras	nombre de Rayleigh instantané lié au sucre, $Rs S_b - S_h $	y_1, y_2	frontières du sous-domaine intérieur Ω_2
Rat	nombre de Rayleigh instantané lié au sel, $Rt T_b - T_h $	$\langle \partial T / \partial y \rangle_{int}$	gradient moyen de T dans l'interface.
R_f	rapport des flux calculé suivant équation (17)	Symboles grecs	
R_g	rapport des flux calculé suivant équation (18)	α, β	coefficient de dilatation du sel et du sucre
Rs	nombre de Rayleigh initial lié au sucre, $g\beta H^3 \delta S / \kappa_T \nu$	δt	pas de temps
Rt	nombre de Rayleigh initial lié au sel, $g\alpha H^3 \delta T / \kappa_T \nu$	$\delta T, \delta S$	différences $T_2 - T_1$ et $S_2 - S_1$
R_p	rapport des masses volumiques, voir équation (19)	κ_T, κ_S	diffusivités moléculaires du sel et du sucre
\bar{S}	concentration moyenne de S dans le sens horizontal (fonction de y)	μ, ν	viscosités moléculaire et cinématique
\tilde{t}, t	temps réel et temps adimensionnel	$\bar{\rho}, \rho_0$	masses volumiques
\tilde{T}	concentration moyenne de T dans le sens horizontal (fonction de y)	τ	rapport des diffusivités, κ_S / κ_T
$\tilde{T}, T, \tilde{S}, S$	concentrations de sel et de sucre (réelles et adimensionnelles)	Ψ_{max}	maximum de la valeur absolue de Ψ
		Ψ, ω	fonction de courant et tourbillon adimensionnés
		ω_{max}	maximum de la valeur absolue de ω
		Ω	domaine de travail
		Ω_j	sous-domaine de calcul j .

quelques simulations directes d'écoulements dans des cavités rectangulaires chauffées par le bas ont fait apparaître différents régimes d'écoulement. Notons par exemple les travaux de Chang *et al.* [13] et ceux d'Ehrenstein et Peyret [14].

L'expérience de convection de double-diffusion la plus simple est de stratifier le domaine du fluide avec deux couches uniformes, séparées par une interface et ayant chacune des valeurs de concentration différentes pour chaque composant. Généralement, le système qui est établi dans cette configuration se relaxe lorsque l'énergie du composant distribué de manière instable se libère (Turner [4], Shirtcliffe [6]). Linden et Shirtcliffe [11] ont suggéré un modèle d'interface *diffusive*

basé sur l'idée que le système se relaxe à travers une série d'états en "quasi-équilibre". Un accord raisonnable fût trouvé entre la théorie et les expériences. Une particularité de ce genre de modèle est que les mouvements de convection dans les deux couches de fluide (au dessus et au dessous de l'interface), sont établis par des instabilités thermiques à l'interface de manière très similaire à ce que l'on peut voir au dessus d'une paroi chauffée à haut nombre de Rayleigh.

Dans cet article nous proposons un modèle d'interface *diffusive* puis nous l'étudions par voie numérique. Pour ce faire, on utilisera un soluté comme composant déstabilisant de la même manière que dans l'expérience de Shirtcliffe [6]. Ainsi, le composant dé-

stabilisant sera le sel et le composant stabilisant le sucre. Pour modéliser cette expérience, on considèrera qu'à l'instant initial, le domaine est rempli par deux couches de fluide visqueux au repos, séparées par une interface et ayant une concentration uniforme de sel et de sucre. Ces concentrations seront différentes d'une couche à l'autre.

2. MODELISATION DU PROBLÈME

On étudie donc le comportement de fluides ayant deux composants diffusant à différente vitesse, soumis aux forces de flottaison dans un domaine plan délimité par deux plans horizontaux infiniment longs et séparés par une distance $2H$ ($-H \leq \tilde{y} \leq H$). On suppose que l'écoulement est bidimensionnel et qu'il admet une périodicité dans la direction horizontale de valeur égale à L ($-L/2 \leq \tilde{x} \leq L/2$). On notera A , l'allongement tel que $A = L/H$. Suivant une terminologie maintenant classique, nous utiliserons l'appellation \tilde{T} pour le composant avec la diffusivité moléculaire la plus élevée (i.e. le sel) et \tilde{S} pour l'autre composant (i.e. le sucre). Ces deux composants auront respectivement les diffusivités moléculaires κ_T et κ_S avec $\tau = \kappa_S/\kappa_T = 0.33$. On fait l'hypothèse que les propriétés du fluide suivent l'approximation de Bousinesq. Ainsi la loi de comportement de la masse volumique $\tilde{\rho}$ est linéaire et donnée par

$$\tilde{\rho} = \rho_0 [1 + \alpha(\tilde{T} - T_1) + \beta(\tilde{S} - S_1)] \quad (1)$$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide en l'absence de \tilde{T} et \tilde{S} et α et β les coefficients de dilatation volumique liés respectivement à \tilde{T} et \tilde{S} (β et $\alpha > 0$). T_1 et S_1 correspondent aux valeurs minimales de \tilde{T} et \tilde{S} à l'instant initial (Fig. 1). A cet instant ($\tilde{t} \leq 0$), le domaine est rempli de deux couches horizontales de fluide (au repos), superposées et séparées par une interface de très faible épaisseur. Dans chaque couche, supposées de même épaisseur, les concentrations en sel \tilde{T} et en sucre \tilde{S} sont uniformes, mais différentes d'une couche à l'autre. A l'état initial nous considérons la distribution suivante :

$$\tilde{T} = [(T_2 - T_1) \text{th}((C/H)\tilde{y})]/2 + (T_2 + T_1)/2 \quad (2a)$$

$$\tilde{S} = [(S_2 - S_1) \text{th}(-(C/H)\tilde{y})]/2 + (S_2 + S_1)/2. \quad (2b)$$

L'épaisseur de l'interface, que l'on définira plus tard, dépend donc du choix de C . Dans la couche supérieure

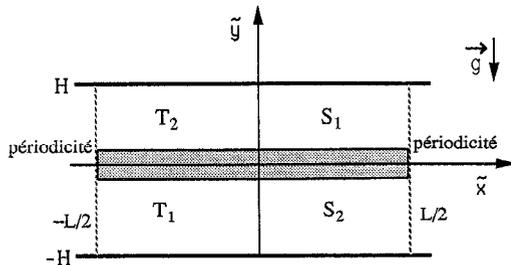


Fig. 1. Géométrie du problème à un l'instant initial.

nous avons $\tilde{T} \approx T_2$ et $\tilde{S} \approx S_1$ tandis que dans la couche inférieure $\tilde{T} \approx T_1$ et $\tilde{S} \approx S_2$. Pour obtenir un système diffusif il faut que

$$T_2 \geq T_1 \quad S_2 \geq S_1 \quad \text{et} \quad \beta(S_2 - S_1) \geq \alpha(T_2 - T_1). \quad (3)$$

La troisième inégalité de l'équation (2) assure la stratification stable du fluide et la stabilité de l'interface.

Quand un système à deux couches avec la stratification imposée par (3) est établi en laboratoire, il est observé que des mouvements convectifs se produisent dans chaque couche. La source d'énergie pour le mouvement est la distribution instable de concentration de sel. Le mouvement convectif dans les deux couches est régi par un dégagement d'éléments fluides légers au voisinage de l'interface séparant les deux couches. A partir de ces observations expérimentales, Linden et Shirtcliffe [11], conçoivent un modèle d'interface *diffusive* dont la particularité essentielle est qu'elle se décompose en trois parties : un coeur central diffusif, à travers lequel les transports des deux composants (\tilde{T} et \tilde{S}) ne s'effectueraient que par diffusion moléculaire, et deux couches limites instables et identiques dont l'une est située au dessus du coeur et l'autre au dessous. Ce serait à partir de ces couches limites que les éléments de fluide légers s'élèveraient. Shirtcliffe [6], à partir de ses observations sur l'interface sucre-sel, a bien mis en évidence l'existence de ce coeur diffusif. Le mécanisme du modèle proposé par Linden et Shirtcliffe [11] est le suivant : chaque couche limite croît par diffusion et c'est parce-que le champ de concentration en sel \tilde{T} est instable et que $\kappa_S < \kappa_T$, que le bord le plus extérieur de chaque couche limite est gravitationnellement instable lorsque l'effet stabilisant du champ de concentration en sucre \tilde{S} est restreint à une région plus fine près du coeur. De plus, au bout d'un certain temps, la couche limite s'effondre et un élément de fluide léger est libéré. Tout le fluide léger dans la couche limite est déplacé et cette dernière alors plus fine recommence à nouveau à croître.

Les équations générales du mouvement sont les équations de Navier-Stokes sous l'approximation de Boussinesq, auxquelles on adjoint les équations de transport-diffusion des deux diffusants (sel et sucre). Elles sont prises sous forme adimensionnelle et en formulation fonction de courant-tourbillon (Ψ, ω) :

$$\partial T/\partial t + V \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (4)$$

$$\partial S/\partial t + V \cdot \nabla S = \tau \nabla^2 S \quad (5)$$

$$\partial \omega/\partial t + V \cdot \nabla \omega = Pr \nabla^2 \omega - a Pr (Rt/\partial x) + Rs \partial S/\partial x \quad (6)$$

$$\nabla^2 \Psi - \omega = 0. \quad (7)$$

Le domaine de travail en variables adimensionnées est délimité par $\Omega = [-A/2; A/2] \times [-1; 1]$ avec $x = \tilde{x}/H, y = \tilde{y}/H, t = \tilde{t}\kappa_T/H^2, T = (\tilde{T} - T_1)/\delta T, S = (\tilde{S} - S_1)/\delta S, \delta T = T_2 - T_1$ et $\delta S = S_2 - S_1$. En prenant κ_T/H pour vitesse de référence, on a :

$\mathbf{V} = (u, v) = (-\partial\Psi/\partial y, \partial\Psi/\partial x)$. Enfin, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ et $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Les autres paramètres sans dimension sont le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa_T$, le nombre de Rayleigh lié au sel $Rt = g\alpha H^3 \delta T/\kappa_T \nu$ et le nombre de Rayleigh lié au sucre $Rs = g\beta H^3 \delta S/\kappa_T \nu$.

Les surfaces horizontales sont rigides et imperméables comme dans l'expérience de Shirtcliffe [6]. Ainsi, les conditions aux limites des variables sans dimensions ($t > 0$) en $y = -1$ et $y = 1$ s'écrivent :

$$\Psi = 0, \quad \partial\Psi/\partial y = 0$$

$$(\text{conditions de non glissement pour la vitesse}) \quad (8)$$

$$\partial T/\partial y = 0 \quad \partial S/\partial y = 0$$

$$(\text{condition d'imperméabilité}). \quad (9)$$

À l'instant initial, les vitesses sont nulles et les champs de concentration T et S sont perturbés aléatoirement à chaque point de l'espace physique. L'amplitude de la perturbation est de l'ordre de la précision machine ($\approx 10^{-12}$).

3. MÉTHODE NUMÉRIQUE

Les solutions sont approchées par un double développement en série de Fourier et polynômes de Tchébychev en espace et par différence finies en temps. Le schéma de discrétisation en temps est semi-implicite : un schéma d'Euler retardé du second ordre à trois niveaux dans le temps pour les termes diffusifs avec une évaluation de type Adams-Bashforth du terme convectif (Vanel *et al.* [15]). La périodicité dans la direction horizontale fait appel à un développement en série de Fourier qui conduit à la résolution d'équations monodimensionnelles pour chaque mode de Fourier. Toutes ces équations sont résolues par la méthode Tau-Tchébychev (Gottlieb et Orszag [16]) associée à la technique de décomposition en sous-domaines utilisée par Lacroix *et al.* [17] et Pulicani [18, 19]. Le but de cet article n'étant pas de détailler cette méthode, nous dirons simplement qu'elle utilise une extension de la technique de la matrice d'influence (Kleiser et Shumann [20]), aussi bien pour imposer les conditions aux limites que les conditions de raccord aux interfaces des domaines. Pour notre problème, nous avons décomposé le domaine de travail en trois sous-domaines Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 tels que

$$\Omega_1 = [-A/2; A/2[\times [-1; y_1[\quad \Omega_2 = [-A/2;$$

$$A/2[\times [y_1; y_2[\quad \text{et} \quad \Omega_3 = [-A/2;$$

$$A/2[\times [y_2; 1[.$$

On appellera N_j le nombre de polynômes de Tchébychev lié au sous-domaine Ω_j , N_{TC} le nombre de polynômes de Tchébychev total ($N_{TC} = N_1 + N_2 + N_3$) et N_F le nombre de modes de Fourier multiplié par deux. La représentation précise de l'interface, aurait nécessité l'utilisation d'un grand nombre de polynômes de Tchébychev si l'on avait choisi la méthode

pseudo-spectrale avec un seul domaine comme Demay *et al.* [21].

4. QUANTITÉS CARACTÉRISTIQUES

4.1. Détermination de l'épaisseur de l'interface

Pour quantifier l'épaisseur h_T de l'interface diffuse, nous utilisons une détermination souvent utilisée par les expérimentateurs et les théoriciens (i.e. Marmorino et Caldwell [8], Linden et Shirtcliffe [11]), à savoir :

$$(h_T/H) = |T_b - T_h| / \langle \partial T/\partial y \rangle_{\text{int}} \quad (10)$$

où $\langle \partial T/\partial y \rangle_{\text{int}}$ correspond à la moyenne de $\partial T/\partial y$ dans l'interface, T_h et S_h les valeurs moyennes de T et S dans la couche de fluide en dessus de l'interface, et T_b et S_b les valeurs moyennes de T et S dans la couche de fluide en dessous de l'interface. Dans l'étude théorique de Linden et Shirtcliffe [11], la quantité $\partial T/\partial y$ est supposée constante dans le coeur de l'interface. Dans Marmorino et Caldwell [8], les quantités T_b , T_h et $\langle \partial T/\partial y \rangle_{\text{int}}$ sont approximées par un tracé graphique ajusté visuellement à partir des profils moyens de T . Pour nous, il n'est pas possible de connaître les valeurs de T_b , T_h et $\langle \partial T/\partial y \rangle_{\text{int}}$ tant que l'on ne connaît pas l'épaisseur de l'interface. Pour la calculer, nous avons d'abord approximé la quantité $\langle \partial T/\partial y \rangle_{\text{int}}$ par la moyenne des valeurs moyennes de $\partial T/\partial y$ en $y = -0.05$, $y = 0$ et $y = 0.05$. Nous verrons dans la discussion des résultats, que h_T/H est rapidement supérieure à 0.1. De plus, dans tous nos essais numériques les conditions initiales sont telles que $h_T/H \geq 0.05$. Il est donc évident que $\langle \partial T/\partial y \rangle_{\text{int}}$ n'a aucun sens tant que $h_T/H < 0.1$. Si l'on note respectivement par T_{m-} et T_{m+} les concentrations moyennes de T sur les frontières $y = -1$ et $y = +1$, notre définition de h_T/H s'écrira :

$$(h_T/H) = (T_{m+} - T_{m-}) / \langle \partial T/\partial y \rangle_{\text{int}}. \quad (11)$$

Cette définition s'est avérée refléter assez bien la mesure graphique que l'on peut faire à partir du profil moyen de T comme l'on fait Marmorino et Caldwell [8]. Ceci se comprend car dans ce problème, les deux couches de fluide de part et d'autre de l'interface ont des concentrations relativement uniformes.

Si y_s et y_i désignent respectivement les ordonnées adimensionnelles des limites supérieure et inférieure de l'interface, nous aurons : $h_T/H = y_s - y_i$. En pratique, pour des raisons de coût, les ordonnées y_s et y_i sont remplacées par les ordonnées des points de collocation-Tchébychev les plus proches de ces valeurs. Malheureusement, ce procédé ne permet pas de mesurer des ordonnées y_s et y_i qui seraient entre deux points de collocation. Donc l'épaisseur h_T/H aura une valeur constante aussi longtemps que le point de collocation supérieur ne sera pas atteint. Evidemment, plus on augmentera le nombre de points de collocation suivant y , moins ce problème sera important. Sur les figures qui montreront l'évolution de h_T/H en fonction du temps, ce phénomène se traduira par une succession de paliers. Il faudra bien se rendre compte

que ces paliers n'ont rien de physique et ne font que traduire la variation entre points de collocation.

4.2. Définition de quelques flux

Les flux de chaque composant passant à travers l'interface se définissent comme suit :

$$\tilde{F}_T = (\rho_0 \alpha \kappa_T \delta T / H) [\bar{N}_T(y_i) + \bar{N}_T(y_s)] / 2 \quad (12a)$$

$$\tilde{F}_S = (\rho_0 \beta \kappa_S \delta S / H) [\bar{N}_S(y_i) + \bar{N}_S(y_s)] / 2 \quad (12b)$$

avec

$$\bar{N}_T(y_0) = \left[\int_{-A/2}^{+A/2} (\partial T / \partial y - v T)_{y_0} dx \right] / A \quad (13a)$$

et

$$\bar{N}_S(y_0) = \left[\int_{-A/2}^{+A/2} (\tau \partial S / \partial y - v S)_{y_0} dx \right] / A \quad (13b)$$

avec $y_0 = y_s$ ou y_i .

Notons que \tilde{F}_T et \tilde{F}_S sont les flux mesurés par les expérimentateurs. Sous forme adimensionnelle ils s'expriment par

$$F_T = \tilde{F}_T / (\rho_0 \alpha \kappa_T \delta T / H) \quad \text{et} \quad F_S = \tilde{F}_S / (\rho_0 \beta \kappa_S \delta S / H). \quad (14)$$

Shirtcliffe [6] normalise \tilde{F}_T avec le flux \tilde{F}_{SP} défini par

$$\tilde{F}_{SP} = 0.085 \rho_0 g^{1/3} \nu^{-1/3} \kappa_T^{2/3} \alpha^{4/3} |T_b - T_h|^{4/3} \delta T^{4/3}. \quad (15)$$

Ce flux, qui a été introduit par Turner [4] représente, quand on utilise la chaleur comme diffusant \tilde{T} , le transfert de chaleur à travers une interface fictive non déformable. Par analogie, en normalisant \tilde{F}_T de la même manière, on obtient le flux de sel adimensionné F_T^* :

$$F_T^* = \frac{\tilde{F}_T}{\tilde{F}_{SP}} = \frac{[\bar{N}_T(y_i) + \bar{N}_T(y_s)] / 2}{0.085 (Rt)^{1/3} |T_b - T_h|^{4/3}}. \quad (16)$$

Une autre quantité souvent mesurée par les expérimentateurs est le rapport des flux R_f défini par

$$R_f = \frac{\tilde{F}_S}{\tilde{F}_T} = \frac{\tau R_S [\bar{N}_S(y_i) + \bar{N}_S(y_s)]}{Rt [\bar{N}_T(y_i) + \bar{N}_T(y_s)]}. \quad (17)$$

Le rapport des flux qui seraient produits que par les gradient verticaux de \tilde{T} et \tilde{S} dans l'interface est aussi une quantité importante que l'on utilisera dans la discussion, à savoir :

$$R_g = \tau R_S \langle \partial S / \partial y \rangle_{\text{int}} / Rt \langle \partial T / \partial y \rangle_{\text{int}}. \quad (18)$$

4.3. Rapport des masses volumiques

Un critère de stabilité de l'interface est donné par le rapport des masses volumiques :

$$R_p = R_S |S_b - S_h| / Rt |T_b - T_h|. \quad (19)$$

La couche la plus basse doit être au moins aussi dense que la couche supérieure, à savoir $R_p \geq 1$.

4.4. Paramètres physiques et numériques

Nous avons effectué un certain nombre d'expériences numériques en faisant varier certains des paramètres du problème : l'allongement A , le nombre de Rayleigh initial lié au sucre Rs , le nombre de Rayleigh initial lié au sel Rt , l'épaisseur initiale de l'interface, tout en conservant les mêmes valeurs du nombre de Prandtl Pr , du rapport des diffusivités τ et du rapport initial des densités R_p , à savoir $Pr = 700$, $\tau = 0.33$ et $R_p = 1.71$ à l'état initial. Ces valeurs de Pr et τ correspondent approximativement à une expérience réelle qui serait réalisée en prenant du sucre (i.e. $\kappa_s = 0.52 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ dans de l'eau à 25°C) et du sel (i.e. $\kappa_T = 1.55 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$) comme composants diffusifs, de la même manière que Shirtcliffe [6]. Dans une des expériences de Shirtcliffe [6], sur laquelle nous avons essayé de nous 'recaler', la première mesure valide a été effectuée alors que $R_p = 1.71$. C'est pourquoi nous avons choisi cette valeur comme rapport initial des densités. L'épaisseur initiale de l'interface est caractérisée dans notre modélisation par la valeur C de la condition initiale (2). Tous nos calculs, ont été effectués en prenant soit $C = 10$ [c.a.d. $(\partial T / \partial y)_{y=0} = 5$], soit $C = 40$ [c.a.d. $(\partial T / \partial y)_{y=0} = 20$]. Les valeurs $C = 10$ et $C = 40$ correspondent respectivement aux épaisseurs $h_i / H \approx 0.2$ (interface épaisse) et $h_i / H \approx 0.05$ (interface fine).

Pour mieux caractériser l'évolution du phénomène physique au cours du temps adimensionnel t , nous avons introduit les nombres de Rayleigh instantanés $Rat = Rt |T_b - T_h|$ et $Ras = Rs |S_b - S_h|$. A l'état initial, nous aurons $Rt \approx Rat$ et $Rs \approx Ras$.

Les calculs ont été effectués, selon le cas, avec un nombre de modes de Fourier variant entre 60 et 100 (ce qui correspond à un nombre de points de collocation, entre 0 et 2π , variant entre 120 et 200) et un nombre de polynômes de Tchébychev total variant entre 75 et 150. Les pas de temps δt varient entre 5×10^{-7} et 2×10^{-5} . Le temps CPU (CRAY 2) par pas de temps est de 0.2 s pour une résolution de 100×90 modes de Fourier-Tchébychev (i.e. pour 200×90 points de collocation). Pour cette étude, nous avons toujours pris les frontières intérieures des trois sous-domaines de calcul Ω_1 , Ω_2 et Ω_3 , telles que $y_2 = -y_1 = 0.2$ (voir paragraphe 3). Tous les essais numériques qui ont été entrepris pour cette étude sont résumés dans le Tableau 1.

Pour la discussion des résultats nous nous servirons de $\tilde{T}(y)$ et $\tilde{S}(y)$ qui correspondent respectivement aux moyennes de T et S dans le sens horizontal. On parlera aussi de U_{max} , V_{max} , ω_{max} et Ψ_{max} qui représentent respectivement les maxima des valeurs absolues de u , v , ω et Ψ . Dans le Tableau 1, quand il est spécifié qu'il y a pure diffusion cela veut dire qu'il n'y a aucune convection dans le domaine. D'autre part, s'il est précisé qu'il y a de la convection et de la diffusion, cela

Tableau 1. Liste des essais numériques avec leurs caractéristiques

Essai	Rt	Rs	A	C	N_F	N_{TC}	$t_f - t_i^\dagger$	Résultat [‡]
1	7.6×10^4	1.3×10^5	1	10	120	75	0.17150	A
2	7.6×10^4	1.3×10^5	1	40	120	75	0.30400	A
3	7.6×10^5	1.3×10^6	1	10	120	75	0.11000	B
4	7.6×10^5	1.3×10^6	1	40	120	75	0.19850	B
5	7.6×10^6	1.3×10^7	1	10	120	75	0.20000	B
6	7.6×10^6	1.3×10^7	1	10	200	75	0.04000	B
7	7.6×10^6	1.3×10^7	2	10	200	75	0.10000	B
8	7.6×10^6	1.3×10^7	1	40	160	150	0.16520	B
9	7.6×10^6	1.3×10^7	1	40	200	150	0.15925	B
10	7.6×10^7	1.3×10^8	1	10	200	90	0.10600	B

[†] $t_f - t_i$ = temps final – temps initial.

[‡] A = pure diffusion, B = convection et diffusion.

sous-entend qu'il y a de la convection dans les deux couches de fluide de part et d'autre de l'interface.

5. DISCUSSION DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Dans toutes les simulations effectuées, on démarre avec la condition initiale (2) représentant deux couches de fluide superposées et séparées par une interface plus ou moins fine. On rappelle que l'équation (2) est perturbée aléatoirement à chaque point de l'espace physique. Dans les expériences de Shirlcliffe [6], ce sont les troubles initiaux dans l'interface qui créent naturellement cette perturbation. Il observe que de la convection apparaît dans les deux couches et que l'interface qui les sépare croît régulièrement par diffusion. En fait, l'interface qui est le moteur de l'écoulement général crée aussi une séparation rendant les deux couches presque indépendantes.

Dans les essais numériques que nous avons effectués (Tableau 1), en fixant toujours $R_p = 1.71$ (à l'état initial), nous obtenons de la convection dans les deux couches, pour des valeurs de $R_t \geq 7.6 \times 10^5$. Il y a donc une limite inférieure où le phénomène de l'interface *diffusive* n'apparaît pas. Quand $R_t \geq 7.6 \times 10^5$, pour les valeurs des paramètres physiques considérés, les phénomènes rencontrés sont qualitativement analogues, avec évidemment des différences quantitatives, suivant l'allongement A , les nombres de Rayleigh initiaux Rs et Rt , l'épaisseur initiale de l'interface h_T/H et la perturbation apportée à l'état initial (2).

On voit ainsi apparaître, dans les deux couches de fluide en dehors de l'interface, un mouvement convectif qui tend à homogénéiser le fluide. Les vitesses maximales dans les deux couches augmentent très légèrement pendant un certain temps, puis croissent très rapidement jusqu'à atteindre leur maximum, et enfin rechutent presque aussi vite vers un intervalle de valeurs qui diminuent au cours du temps. Selon les cas, cette convection se développe plus ou moins rapidement. Pour s'en assurer, on peut observer les Figs. 2 et 3 qui montrent l'évolution de V_{\max} en fonction du temps pour différent cas. Il est évident que lorsque l'interface a atteint les limites du domaine de calcul, l'écoulement général tend vers le repos. La phase où

les vitesses augmentent brusquement puis diminuent tout aussi vite, correspond à une période d'établissement vers un état de quasi-équilibre pour l'interface. En effet pendant cette phase, le comportement qualitatif des flux F_T et F_S est le même que celui de V_{\max} . Il y a donc un transport important de sel et de sucre au moment où la convection atteint ses valeurs maximales, puis une stabilisation de ces échanges (à travers l'interface) autour de valeurs du même ordre de grandeur. Selon les cas, les solutions obtenues durant cette période, ont une périodicité égale à $A/2$. Dans tous les cas, cette périodicité semble disparaître quand les vitesses se stabilisent (tout en fluctuant), c'est à dire au moment où l'interface atteint son état de quasi-équilibre. Nous reviendrons sur cette question.

Cet intense mouvement convectif durant la phase d'établissement, explique en partie les difficultés numériques qui sont associées à ce problème nécessitant un nombre de modes suffisamment grand pour être résolu correctement. Ce point est mieux détaillé dans le paragraphe suivant qui décrit deux cas typiques.

5.1. Description d'un cas typique

On décrit maintenant les résultats obtenus avec l'essai 9 : $Rt = 7.6 \times 10^6$, $A = 1$ et $C = 40$ (Tableau 1). Ce cas correspond à celui d'une interface initiale fine. La Fig. 4(a) et (b) montre les évolutions des champs de ω , Ψ , T et S à différents temps :

- A $t = 0.00125$, les champs des lignes d'iso- ω et d'iso- Ψ qui sont encore sous l'influence de la condition initiale (2) (perturbée aléatoirement), présentent une topologie complètement tourmentée. Notons qu'à cet instant les vitesses sont encore pratiquement nulles ($V_{\max} = 5.9 \times 10^{-9}$).

- A $t = 0.005$, les champs des lignes d'iso- ω et d'iso- Ψ deviennent tout à fait structurés. La Fig. 4(a) montre bien que dans chaque couche de fluide, quatre cellules convectives ont pris forme. Ces quatre cellules prises deux par deux, forment des structures à deux rouleaux se répétant avec une période en x inférieure à celle qui est imposée par la modélisation. La Fig. 5 qui montre l'évolution du profil horizontal du tour-

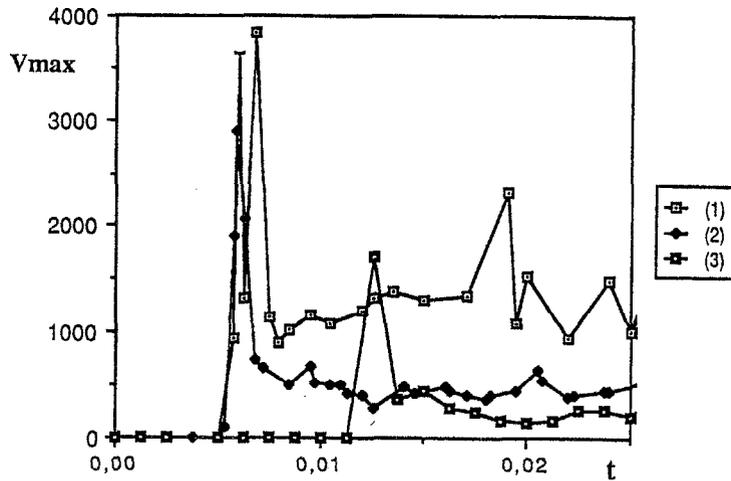


Fig. 2. Evolution de V_{\max} en fonction du temps: (1) essai 10 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^7$ et $Rs = 1.3 \times 10^8$); (2) essai 9 (état initial avec une interface fine, $Rt = 7.6 \times 10^6$ et $Rs = 1.3 \times 10^7$); (3) essai 5 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^6$ et $Rs = 1.3 \times 10^7$).

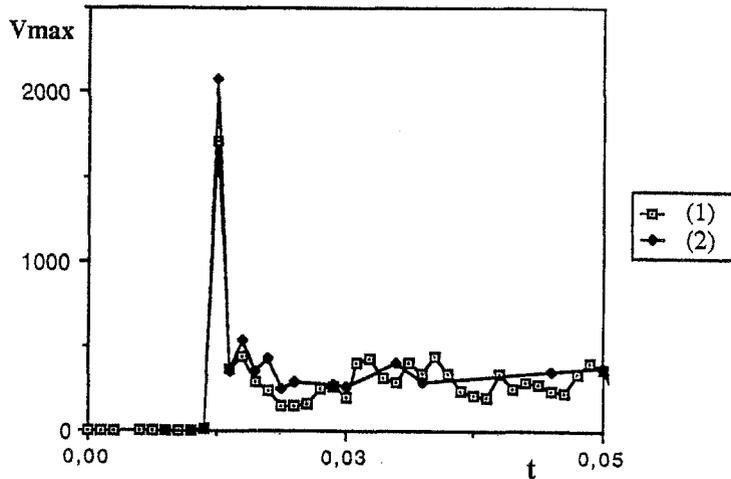


Fig. 3. Evolution de V_{\max} en fonction du temps: (1) essai 5 (état initial avec une interface épaisse, $A = 1$, $Rt = 7.6 \times 10^6$ et $Rs = 1.3 \times 10^7$); (2) essai 7 (état initial avec une interface épaisse, $A = 2$, $Rt = 7.6 \times 10^6$ et $Rs = 1.3 \times 10^7$).

billon en $y = 0.2$, permet aussi de constater que cette période est égale à $A/2$.

Pour les temps inférieurs à 0.005, les vitesses dans tout le domaine sont inférieures ou égales à 10^{-4} . A $t = 0.005$ où les vitesses sont encore faibles, nous avons $V_{\max} = 7.47$ et $\omega_{\max} = 111.9$. De manière générale, U_{\max} est du même ordre grandeur que V_{\max} mais avec des valeurs toujours inférieures à ce dernier.

La Fig. 6, qui présente les profils verticaux de \bar{T} à différents temps, montre qu'entre les temps 0 et 0.005 où les vitesses sont nulles, l'épaisseur de l'interface a fortement augmentée par diffusion. A l'état initial on avait $h_T/H = 0.05$ alors que maintenant on a $h_T/H = 0.27$. En fait, tant qu'il n'y a que de la diffusion, il ne se passe rien d'autre que la croissance

de l'interface. En observant les lignes d'iso- T et d'iso- S sur la Fig. 4(b), on voit bien que l'épaisseur de l'interface de sel (i.e. T) croît plus vite que celle de l'interface de sucre (i.e. S). Ceci est bien normal car la vitesse de diffusion de T est trois fois plus importante que celle de S ($\tau = \kappa_S/\kappa_T = 0.33$). Notons aussi que dans ce calcul, la solution est symétrique par rapport à $y = 0$ jusqu'à un certain temps :

- A $t = 0.00575$, la convection atteint son intensité maximale et l'on voit mieux apparaître [Fig. 4(a)] dans chaque couche, la structure à deux rouleaux se répétant avec une période $A/2$ (on rappelle que dans chaque couche il y a deux structures formées de deux rouleaux). On peut déjà constater que les centres de ces rouleaux (où les valeurs de ω et ψ sont maximales)

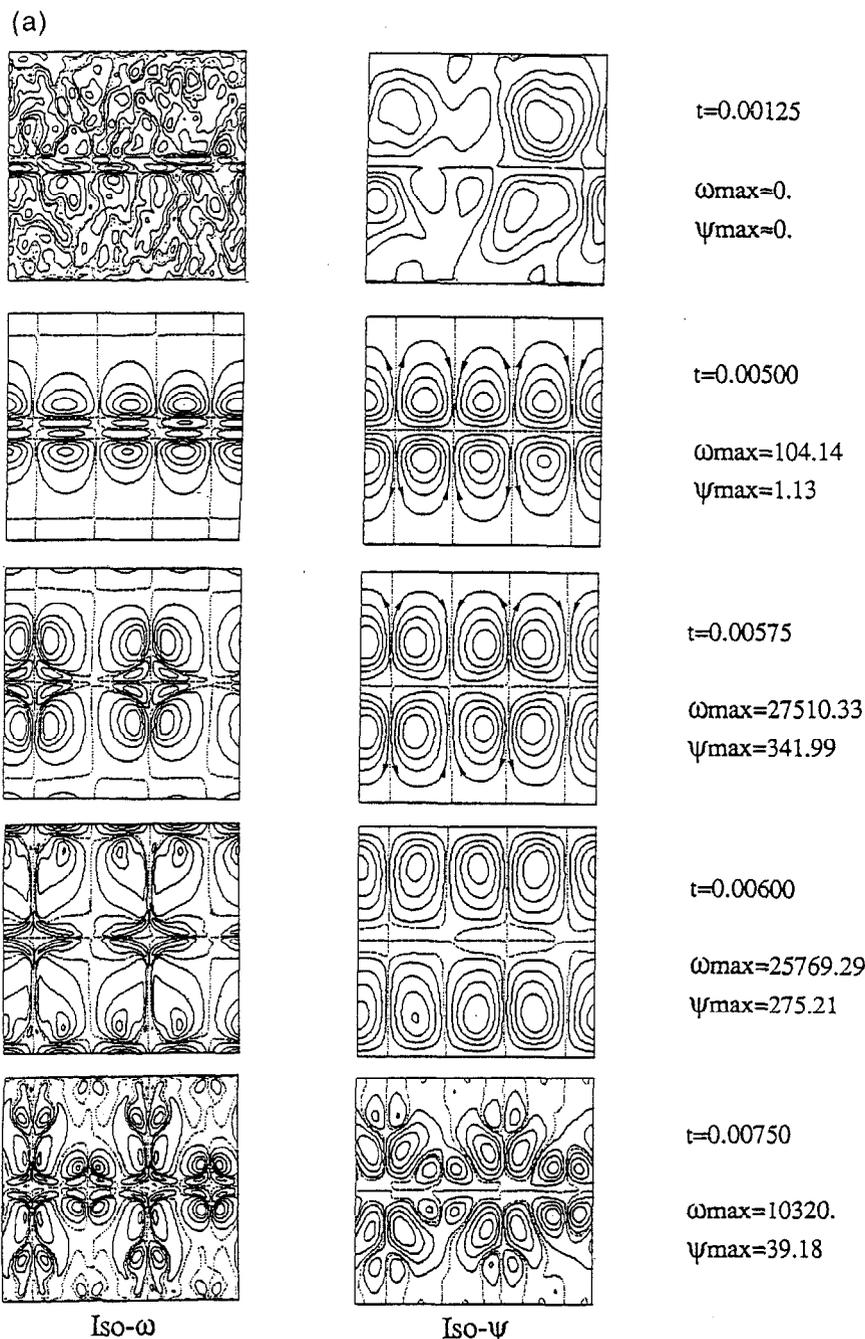


Fig. 4(a).

se sont rapprochés l'un de l'autre par rapport au temps $t = 0.005$. Ceci est très bien visualisé avec les lignes d'iso-tourbillon. Les deux rouleaux formant une structure telle qu'on l'a décrite précédemment, tournent en sens inverse et créent un arrachement d'éléments fluides aux frontières de l'interface. Ce phénomène engendre un retrécissement important de l'interface dans une section verticale séparant deux structures [voir simultanément la Fig. 4(a) et (b)]. Par contre, si l'on se place au niveau d'une section verticale passant par le milieu d'une structure (à deux rouleaux

très proches l'un de l'autre), on assiste à un élargissement de l'interface. En fait, les particules de fluide qui sont arrachées de la couche limite de l'interface, dans la zone où son épaisseur est très faible, sont transportées puis éloignées de l'interface aux endroits où elle s'élargit. Les lignes d'iso- T et d'iso- S [Fig. 4(b)] permettent de bien constater ce processus.

• A $t = 0.00575$ nous avons $V_{\max} = 2872$ et $\omega_{\max} = 27511$. On peut déjà imaginer les difficultés numériques qu'engendrent cette intensité tourbillonnaire et le retrécissement important de l'interface qui en

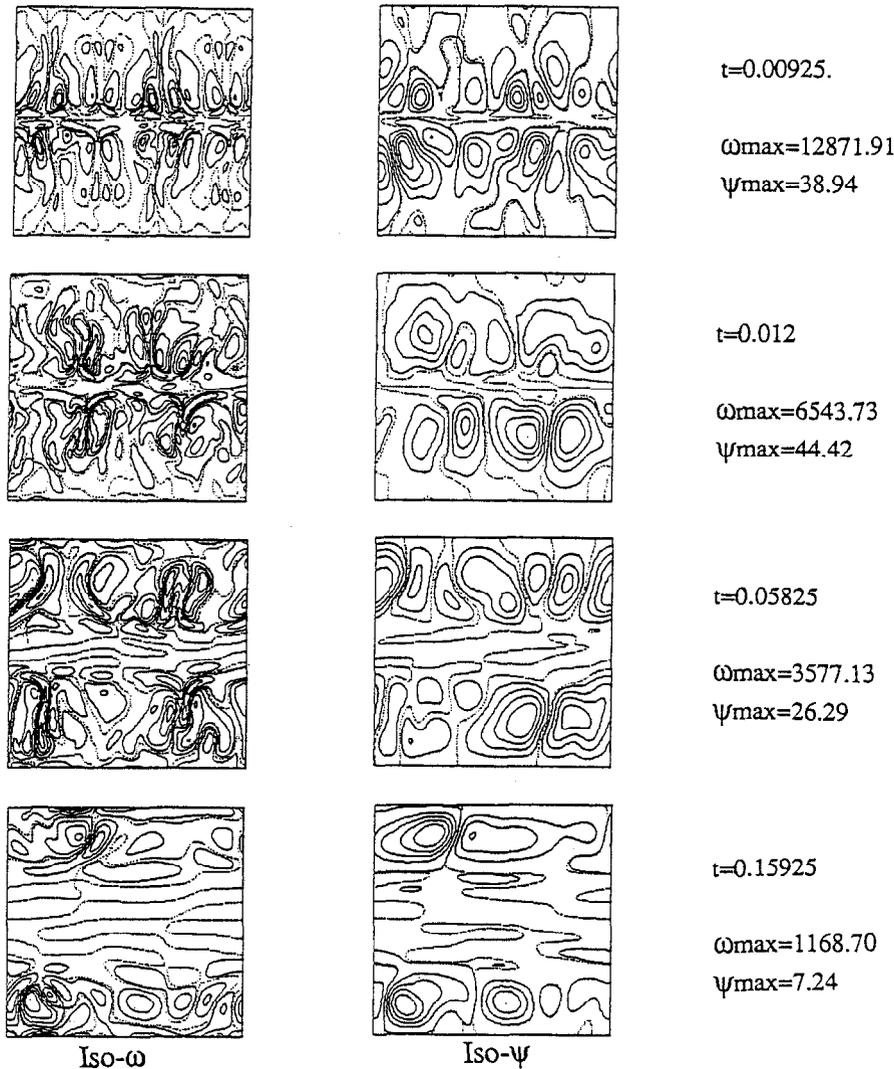


Fig. 4(a)—continued.

résulte. Non seulement, ce problème nécessite un nombre de modes suffisamment grand pour représenter correctement la solution en espace, mais aussi un pas de temps suffisamment petit pour la représenter correctement en temps. Ainsi, dans ce calcul, à $t = 0.00575$, nous avons dû diminuer le pas de temps jusqu'à la valeur $\delta t = 5 \times 10^{-7}$ (voir Tableau 1). Bien sûr, aux temps ultérieurs, quand l'intensité de la convection diminue, on augmente à nouveau le pas de temps. Supposons maintenant que l'on ait $2H = 6$ cm comme dans la dernière expérience de Shirtcliffe [6]. Sachant que les quantités $\tilde{t}^* = H^2 / \kappa_T$ et $\tilde{V}^* = \kappa_T / H$ correspondent respectivement au temps et à la vitesse de référence, on peut déduire aisément les valeurs du temps physique \tilde{t} et de la vitesse physique \tilde{V} ($\tilde{t}^* \approx 5.8 \times 10^5$ s et $\tilde{V}^* \approx 5.17 \times 10^{-8}$ m s $^{-1}$).

Ainsi, les temps adimensionnels $t = 0.00575$ et $\delta t = 5 \times 10^{-7}$ correspondent respectivement aux temps physiques $\tilde{t} \approx 55.6$ min et $\delta \tilde{t} \approx 0.3$ s et la vitesse

$V_{\max} = 2872$ correspondra à la vitesse physique $\tilde{V}_{\max} \approx 1.48 \times 10^{-4}$ m s $^{-1}$.

• A $t = 0.006$, l'intensité de la convection commence à décroître (à ce temps nous avons $V_{\max} = 1885$ et $\omega_{\max} = 25\,769$), mais sa répartition devient plus uniforme dans les deux couches. On voit sur la Fig. 4(a), que les centres des rouleaux convectifs se sont rapprochés des frontières horizontales du domaine de calcul. Ainsi, les éléments de fluide qui sont libérés des couches limites de l'interface sont répartis dans tout le domaine extérieur à cette dernière. Ce brassage plus général, de chacune des deux couches de fluide, est le début de leur homogénéisation. On peut constater, en observant les lignes d'iso- T et d'iso- S , qu'à ce temps les retrécissements locaux de l'interface sont particulièrement importants. Notons enfin, la forte concentration des lignes d'iso-tourbillon au milieu d'une structure à deux rouleaux telle qu'on l'a décrite au

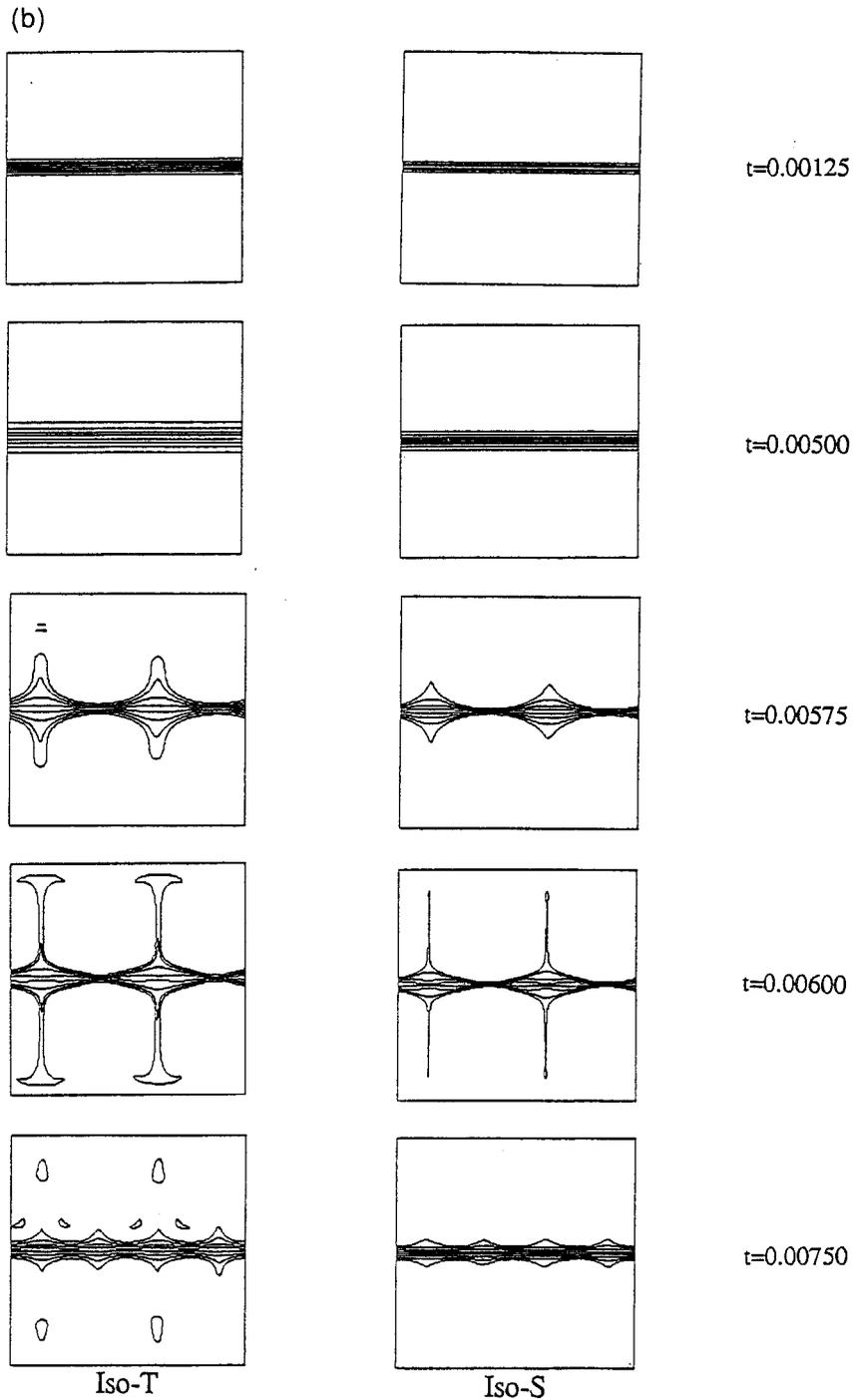


Fig. 4(b).

temps précédent. Ceci est la conséquence du rapprochement des deux maxima de ω dans la structure en question.

• De $t = 0.00625$ à $t = 0.00750$, la Fig. 5 exhibant les profils horizontaux de ω en $y = 0.2$, montre bien ce rapprochement des maxima dans chacune des structures, par rapport au temps $t = 0.00575$. Le proche

voisinage et le signe opposé de ces maxima (les rouleaux de convection tournent en sens inverse), engendrent donc de très fortes variations du tourbillon dans le sens horizontal. Ceci explique le besoin d'un nombre de modes de Fourier important dans cette direction. Au temps $t = 0.00625$, nous avons $V_{\max} = 783$ et $\omega_{\max} = 15\,487$. Les profils de la Fig. 5 permettent

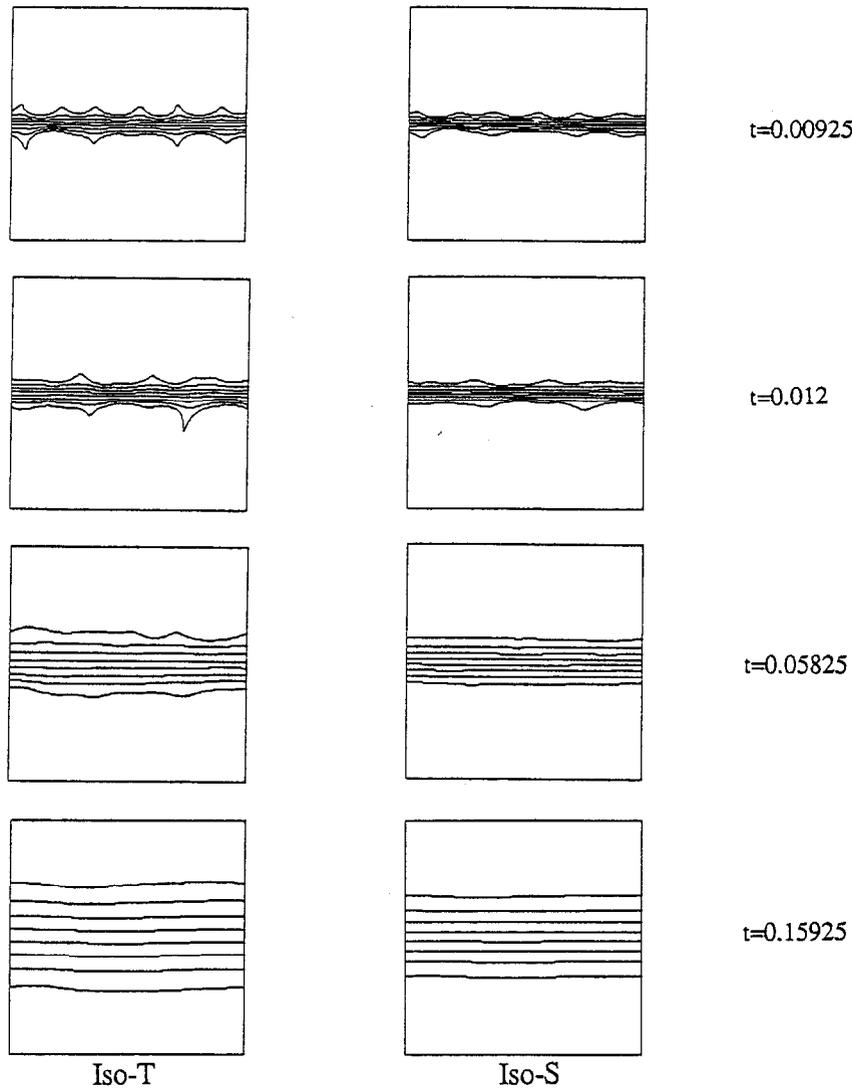


Fig. 4. (a) Lignes d'iso- ω et d'iso- Ψ ; (b) lignes d'iso- T et d'iso- S . Essai 9 du Tableau 1.

de constater qu'à partir de $t = 0.00725$, l'écoulement commence à perdre sa périodicité de $A/2$. Ceci se traduit au niveau des lignes d'iso- ω et d'iso- ψ , par l'apparition de structures secondaires au dessus et entre ce qui était jusqu'à lors les deux structures principales [Fig. 4(a) au temps $t = 0.00750$]. Les lignes d'iso- T montrent qu'à partir de $t = 0.00675$, l'interface présente une épaisseur plus régulière sur toute sa longueur. Au temps $t = 0.00750$, nous avons $V_{\max} = 496$ et $\omega_{\max} = 10\,320$. A partir de ce temps les vitesses maximales se mettent à fluctuer irrégulièrement. Leur tendance moyenne accuse néanmoins une décroissance lente au fur et à mesure que le phénomène évolue. En fait, comme on l'a déjà évoqué dans le paragraphe précédent, la brusque montée et descente en vitesse correspond à une phase d'établissement, où le système à deux couches recherche un état de quasi-équilibre. Pendant cette période, les échanges de matière entre

les deux couches (i.e. dans l'interface) sont très importants. Notons au passage que dans la dernière expérience de Shirtcliffe [6], les gradients initiaux des deux composants dans l'interface étaient si grands, qu'il fallut attendre 8.2 h pour que les troubles dans cette dernière disparaissent de manière à obtenir la première mesure valide. Dans cette expérience, il utilisait un récipient de hauteur $2H = 6$ cm. Ainsi, pour fixer les idées, notons que le temps $\tilde{t} = 8.2$ h correspond au temps sans dimension $t \approx 5.09 \times 10^{-2}$. Dans notre expérience numérique, à $t = 5.09 \times 10^{-2}$, l'interface aura déjà atteint la dimension $h_T/H = 0.499$ (i.e. $h_T \approx 1.5$ cm). La phase d'établissement est donc plus courte dans notre simulation numérique que dans l'expérience réelle. Ceci est évidemment lié à la modélisation de l'interface initiale et de la perturbation déclanchant le mouvement. Dans nos essais numériques, il faudra attendre de passer la période de

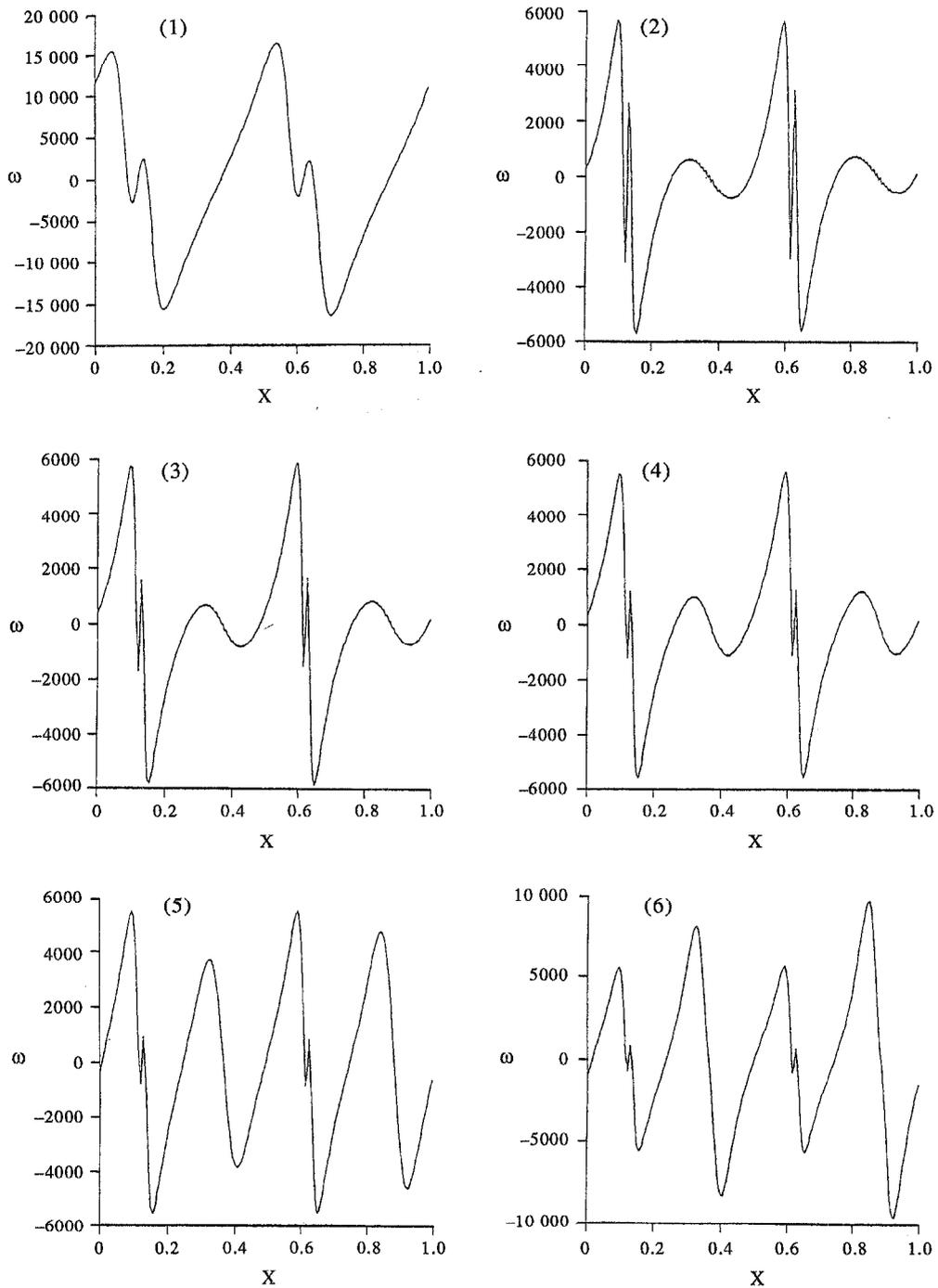


Fig. 5. Profils horizontaux du tourbillon ω en $y = 0.2$, correspondant à l'essai 9 du Tableau 1, aux temps : (1) $t = 0.00575$, (2) $t = 0.00625$, (3) $t = 0.00650$, (4) $t = 0.00675$, (5) $t = 0.00725$, (6) $t = 0.00750$.

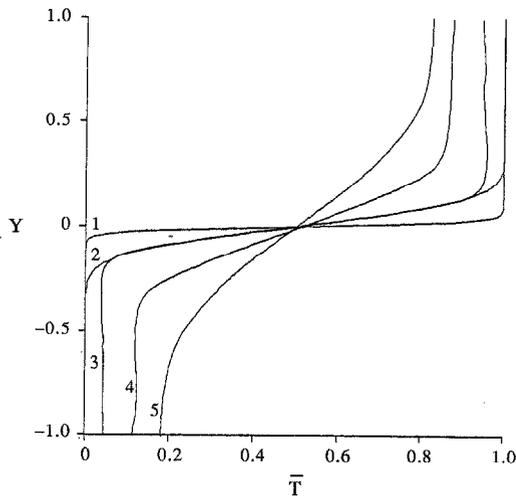


Fig. 6. Profils verticaux de la concentration moyenne (horizontale) de sel \bar{T} aux temps : (1) $t = 0$, (2) $t = 0.005$, (3) $t = 0.012$, (4) $t = 0.05825$, (5) $t = 0.15925$. Essai 9 du Tableau 1.

forte convection pour que nos mesures de flux et de vitesses puissent être comparées à celles des expériences réelles.

- A $t = 0.00925$, l'écoulement dans les deux couches devient très désordonné dans la mesure où l'on distingue difficilement des structures principales. Le mouvement convectif dans les deux couches est entretenu par le dégagement d'éléments fluides sur les couches limites de l'interface. Le moment où cet arrachement de particules fluides s'effectue dans une couche, correspond à celui où les vitesses dans cette dernière augmentent. Ce processus correspond très bien aux observations expérimentales. Pour donner une idée des fluctuations des vitesses notons qu'entre les temps $t = 0.00750$ et $t = 0.01$, V_{\max} a oscillé irrégulièrement entre les valeurs 281 et 731, et ω_{\max} entre 9667 et 12 871. On peut observer l'évolution de V_{\max} en fonction du temps correspondant à ce cas (essai 9) sur la Fig. 2.

- De $t = 0.012$ à $t = 0.15925$, la Fig. 6 montre qu'à l'intérieur de l'interface, les profils verticaux de \bar{T} sont approximativement linéaires au début, mais le sont beaucoup moins lorsque les limites de l'interface se rapprochent de celles du domaine de calcul. On voit bien que jusqu'au temps $t = 0.05825$ les valeurs de \bar{T} dans ces couches sont pratiquement constantes. Ce qui témoigne d'une bonne homogénéité des concentrations en dehors de l'interface. L'allure des profils verticaux de \bar{T} est tout fait similaire à celle des profils obtenus par Shirtcliffe [6]. A $t = 0.15925$, l'interface devient très difficile à mesurer. Malgré leurs fluctuations, les vitesses dans les deux couches ont une tendance moyenne vers la décroissance. L'écoulement général évolue lentement vers le repos. A $t = 0.15925$, nous avons $h_T/H = 0.952$, $V_{\max} = 66.3$ et $\omega_{\max} = 1168.7$. Notons que la fin du calcul correspond à un

temps physique de l'ordre de 26 h, ce qui est tout à fait comparable aux temps des expériences.

5.2. Influence des différents paramètres sur le comportement de la solution

5.2.1. Influence du nombre de modes.

Considérons maintenant les résultats obtenus avec l'essai 8 : $Rt = 7.6 \times 10^6$, $A = 1$ et $C = 40$. En observant le Tableau 1, on peut remarquer que ce calcul a été effectué avec les mêmes paramètres physiques utilisés pour l'essai 9 (décrit au paragraphe précédent), mais qu'il diffère avec le nombre de modes de Fourier ($N_F = 200$ pour l'essai 9 et 160 pour l'essai 8). La Fig. 7 montre les champs de ω , ψ et T à cinq temps différents. Sur la Fig. 4(a) et (b) qui correspondent à l'essai 9, les mêmes champs sont représentés aux mêmes temps. En comparant les Figs. 4(a), (b) et 7, on constate qu'avec l'essai 8 il n'apparaît pas de solution avec une période égale à $A/2$ comme avec l'essai 9, durant la phase dite d'établissement. Aux temps $t = 0.0075$ et $t = 0.00925$, on distingue malgré tout, dans chaque couche, deux structures principales de convection qui se ressemblent mais qui diffèrent par la taille. Au temps $t = 0.00925$ la solution, comme avec l'essai 9, commence à prendre une apparence chaotique. Notons aussi qu'au niveau quantitatif et évolutif il y a très peu de différence entre les essais 8 et 9. Dans ce problème, il semblerait que l'on ait besoin d'un nombre de modes suffisant (et en particulier les modes de Fourier) pour obtenir dans les premiers temps une solution avec une période de longueur plus petite que celle imposée par la modélisation.

Pour le cas de l'essai 5, nous avons voulu savoir si en augmentant le nombre de modes de Fourier, on conservait plus longtemps la périodicité de la solution. Ainsi nous avons mis à exécution l'essai 6 qui diffère de l'essai 5 seulement par le nombre de modes de Fourier ($N_F = 120$ pour l'essai 5 et $N_F = 200$ pour l'essai 6). Nous avons constaté que la périodicité de la solution était perdue à peu près au même moment dans les deux cas. On peut donc penser, que la perte de périodicité après chaque phase d'intense convection n'est pas forcément due à un manque de résolution en Fourier.

5.2.2. Influence de l'épaisseur initiale de l'interface.

Considérons l'essai 5, dont les données sont identiques à celles de l'essai 9 (décrit au paragraphe 5.1), mais pour lequel on a démarré avec une interface initiale épaisse au sens où on l'a défini dans le paragraphe 4.4. Les phénomènes rencontrés sont qualitativement analogues à ceux observés avec l'essai 9 où l'interface de départ est plus fine. Cependant, avec une interface initiale plus épaisse, le maximum des vitesses apparaît plus tard, avec une intensité bien plus faible (comparer les essais 5 et 9 sur la Fig. 2). Les Figs. 8 et 9 montrent respectivement l'évolution dans le temps des profils verticaux de \bar{T} et \bar{S} correspondant à l'essai 5. La Fig. 10 montre l'évolution de l'épaisseur de l'interface avec le temps pour les essais 5 et 9. On constate que pour les deux cas, h_T/H croît rapidement au début, puis

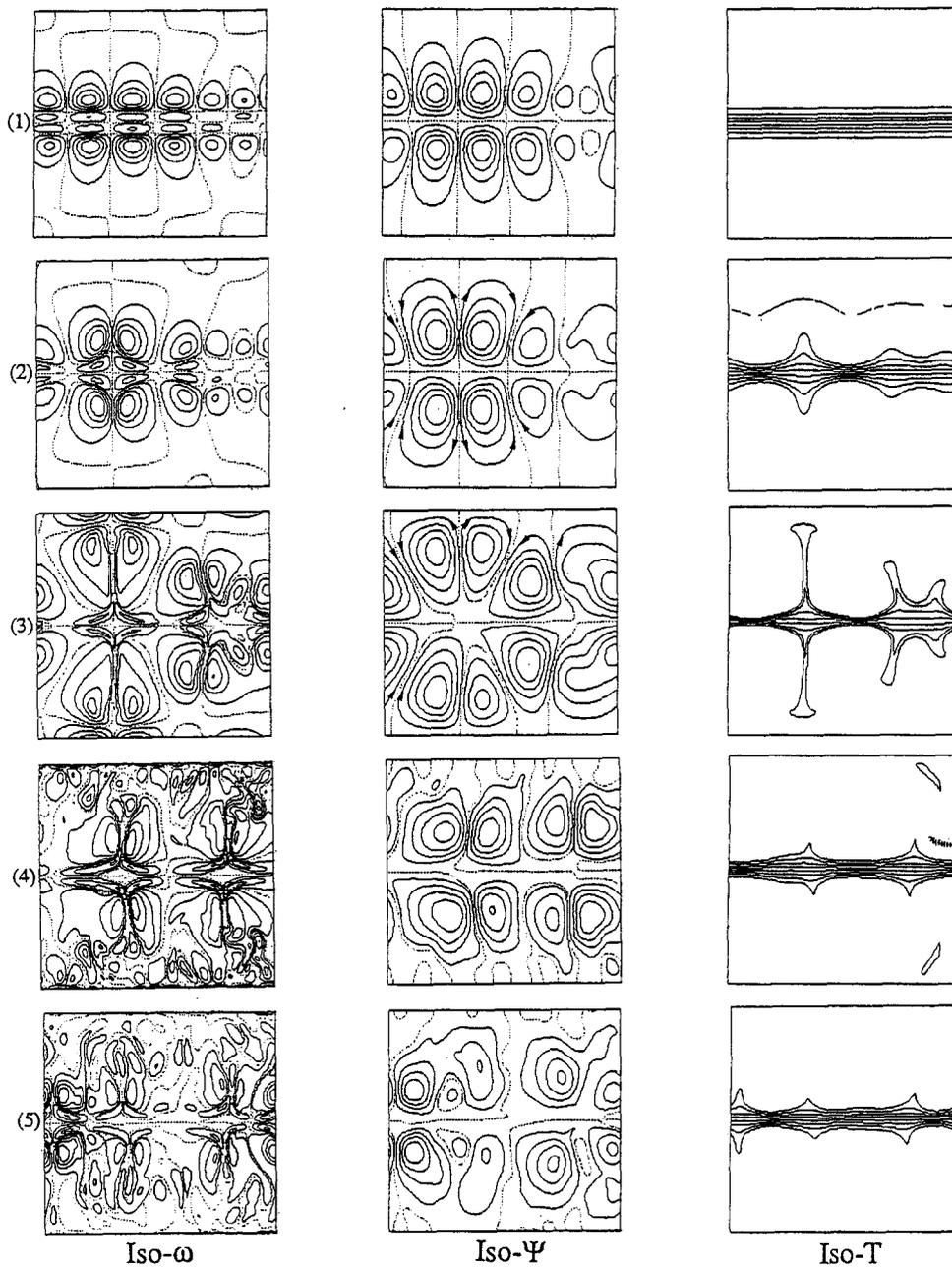


Fig. 7. Lignes d'iso- ω , d'iso- Ψ et d'iso- T correspondant à l'essai 8 du Tableau 1. (1) $t = 0.005$: $\omega_{\max} = 87.36$, $\Psi_{\max} = 0.66$; (2) $t = 0.00575$: $\omega_{\max} = 22109.0$, $\Psi_{\max} = 205.5$; (3) $t = 0.006$: $\omega_{\max} = 27\,193.4$, $\Psi_{\max} = 322.9$; (4) $t = 0.0075$: $\omega_{\max} = 8432.3$, $\Psi_{\max} = 70.5$; (5) $t = 0.00925$: $\omega_{\max} = 11\,205.6$, $\Psi_{\max} = 71.8$.

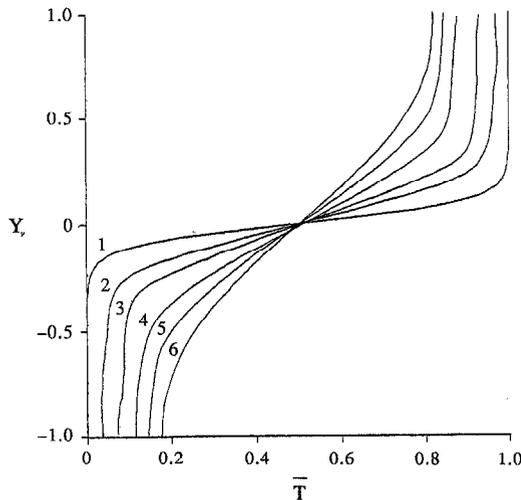


Fig. 8. Profils verticaux de la concentration moyenne (horizontale) de sel \bar{T} aux temps : (1) $t = 0$, (2) $t = 0.025$, (3) $t = 0.055$, (4) $t = 0.105$, (5) $t = 0.15$, (6) $t = 0.2$. Essai 5 du Tableau 1.

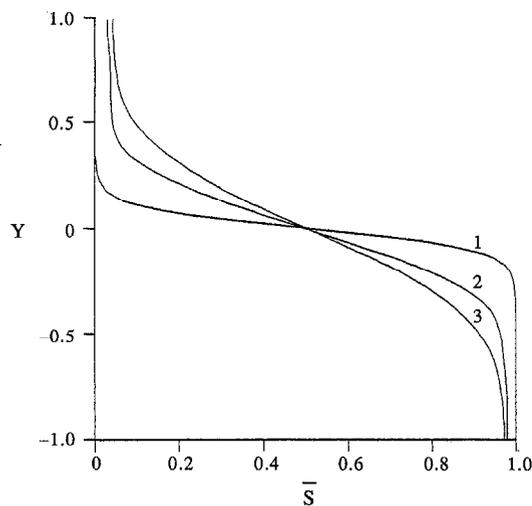


Fig. 9. Profils verticaux de la concentration moyenne (horizontale) de sucre \bar{S} aux temps : (1) $t = 0$, (2) $t = 0.105$, (3) $t = 0.2$. Essai 5 du Tableau 1.

décroit légèrement et enfin croît à nouveau (mais moins rapidement qu'au début) en marquant des paliers. Cette brusque croissance suivie d'une légère décroissance correspond à la phase d'établissement. On a vu dans le paragraphe 4.2 que ces paliers n'ont rien de physique et qu'en fait on ne faisait que suivre les points de collocation. Par ailleurs, si l'on observe l'évolution de h_T/H , correspondant à l'essai 9, on voit sur la Fig. 10, qu'entre $t = 0.025$ et $t = 0.05$, elle est pratiquement linéaire et que $0.35 \leq h_T/H \leq 0.5$. Or, cet intervalle correspond à une zone où les points de collocation sont très rapprochés. De plus, l'essai 9 est un cas où nous avons un nombre important de points de collocation dans la direction verticale. Ainsi, même

en suivant les points de collocation comme il a été dit, l'erreur faite sur h_T/H dans cet intervalle, est très faible. En bref, l'évolution de h_T/H en fonction du temps semble bien être linéaire après un certain temps. C'est pourquoi, nous avons approximé (au sens des moindres carrés) toutes les courbes d'évolution de h_T/H par un polynôme du premier ordre. De cette manière on obtient :

$$h_T/H = 0.3509 + 3.7070t$$

pour l'essai 5 (interface initiale épaisse) et

$$h_T/H = 0.2185 + 4.8292t$$

pour l'essai 9 (interface initiale fine).

Donc, en prenant une interface épaisse à l'état initial, l'épaisseur h_T/H augmente moins rapidement que si l'on prend une interface plus fine. On voit sur la Fig. 10, qu'après le temps $t = 0.1$, la courbe correspondant à l'essai 9, va rejoindre celle qui se rapporte à l'essai 5.

5.2.3. *Influence de l'allongement.* Nous analysons ici les résultats obtenus avec l'essai 7 qui a été effectué avec la même interface initiale et les mêmes nombres de Rayleigh utilisés pour l'essai 5, mais avec un allongement égal à 2. La Fig. 11 montre les champs du tourbillon, de la fonction de courant et de la salinité à différents temps. On observe, que dans les premiers instants, le nombre de structures principales diffère entre la couche supérieure et la couche inférieure. Dans la couche supérieure, la tendance à la périodicité (avec une période égale à $A/4$) est plus marquée. Cette différence de structure entre la couche supérieure et la couche inférieure (dans les premiers instants) est probablement dû à un manque de modes de Fourier dans la direction horizontale. En effet, pour l'essai 5 où $A = 1$ nous avons $N_F = 120$ tandis que pour l'essai 7 où $A = 2$, nous avons seulement $N_F = 200$. D'autre part, l'évolution dans le temps et l'ordre de grandeur des quantités telles que : les maxima des vitesses, les flux et l'épaisseur moyenne de l'interface, ne diffèrent guère de ceux obtenus avec l'essai 5 avec ces mêmes quantités. Pour s'en assurer, la Fig. 3 donne l'évolution de V_{\max} pour les cas qui correspondent aux essais 5 et 7. Il semble donc que l'allongement ne joue pas un rôle primordial dans ce problème. Il serait cependant sûrement intéressant d'effectuer une étude plus approfondie de l'effet du nombre de modes et de l'allongement, sur la solution.

5.2.4. *Influence des nombres de Rayleigh.* Le calcul où nous avons pris les plus grands nombres de Rayleigh correspond à l'essai 10: $Rt = 7.6 \times 10^7$, $Rs = 1.3 \times 10^8$, $A = 1$ et $C = 10$. La Fig. 12 montre les profils verticaux de \bar{T} , à quelques instants caractéristiques. On voit bien, que la concentration de sel en dehors de l'interface est bien uniforme. Si l'on compare ces profils à ceux de la Fig. 8 qui se rapporte à un cas où le nombre de Rayleigh est plus faible (essai 5), on peut constater que la salinité dans les deux couches est plus uniforme dans le cas de l'essai 10.

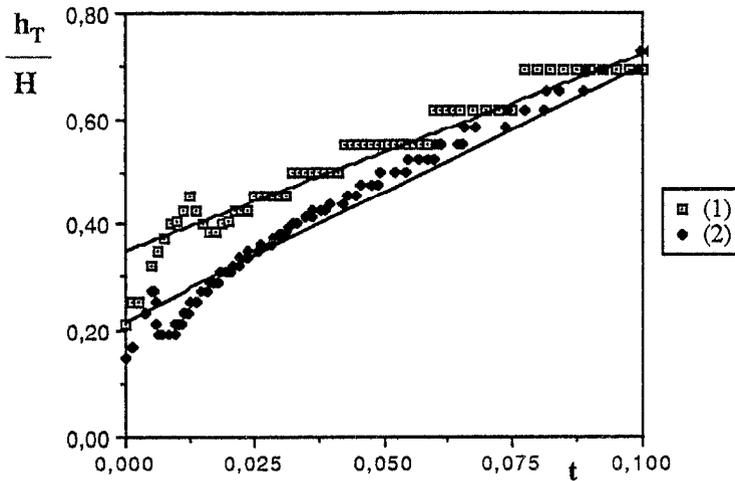


Fig. 10. Evolution de h_T/H en fonction du temps: (1) essai 5 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^6$ et $Rs = 1.3 \times 10^7$); (2) essai 9 (état initial avec une interface fine, $Rt = 7.6 \times 10^6$ et $Rs = 1.3 \times 10^7$).

Ceci est logique, car pour cet essai, le nombre de Rayleigh plus important, engendre une convection d'autant plus grande dans les deux couches. Cette plus grande convection est bien mise en évidence sur la Fig. 2 (sur cette figure, comparer les essais 10 et 5). La Fig. 13 montre l'évolution de h_T/H en fonction du temps, pour trois cas de calcul qui diffèrent par leur nombre de Rayleigh. On obtient les lois approchées :

$$h_T/H = 0.3560 + 5.1170t \quad \text{pour l'essai 3}$$

$$h_T/H = 0.3509 + 3.7070t \quad \text{pour l'essai 5 et}$$

$$h_T/H = 0.3073 + 3.1021t \quad \text{pour l'essai 10.}$$

On remarque donc, que l'épaisseur de l'interface augmente moins vite quand les nombres de Rayleigh sont plus importants. La Fig. 14, donne l'évolution de R_g [voir équation (18)] en fonction du temps pour les mêmes cas de calcul que la Fig. 13. On constate qu'après le temps 0.075, les trois courbes d'évolution se croisent, puis continuent leur progression linéairement. Cette progression linéaire, commence d'autant plus tôt, que le nombre de Rayleigh est important.

5.3. Comparaisons avec les résultats expérimentaux

Dans ce problème, qui utilise le sel et le sucre comme composants diffusifs, la masse totale de chaque composant est conservée. Ainsi, les flux de sel et de sucre à travers l'interface, seront respectivement proportionnel aux vitesses d'échange de $\alpha \delta T$ et $\beta \delta S$. En partant de ce principe, Shirtcliffe [6] mesure le rapport des flux R_f , en disant qu'il est égal pendant toute une expérience, au gradient du graphe de $\beta \delta S$ en fonction de $\alpha \delta T$. La Fig. 2 de son article permet de constater que pour chacune de ses expériences, les graphes de $\beta \delta S$ en fonction de $\alpha \delta T$, sont des droites accusant globalement la même pente. Il est ainsi montré que $R_f \approx \sqrt{\tau} \approx 0.58$. Notons que les valeurs durant les premiers instants des expériences n'ont pas été relevées

car elles ne sont pas significatives. Comparons maintenant nos courbes avec celles obtenues dans les expériences.

La Fig. 15(a) et (b) montre respectivement pour les essais 10 et 5 l'évolution de Rat en fonction de Ras . Ces deux courbes sont qualitativement et quantitativement très proches de celles données par Shirtcliffe [6] dans la Fig. 2 de son article. On peut donner les lois :

$$Ras = 0.5338Rat + 8.895 \times 10^7$$

pour le cas de la Fig. 15(a) (essai 10) et

$$Ras = 0.4510Rat + 9.542 \times 10^6$$

pour le cas de la Fig. 15(b) (essai 5).

Si l'on utilise la méthode de Shirtcliffe pour calculer R_f , nous aurons $R_f \approx 0.534$ pour l'essai 10 et $R_f \approx 0.451$ pour l'essai 5. Donc, quand les nombres de Rayleigh sont plus faibles, le rapport R_f l'est aussi. Cette tendance est aussi observée dans les expériences de laboratoire. De plus, avec ses nombres de Rayleigh les plus faibles, c'est à dire $Rt \approx 7.6 \times 10^9$ et $Rs \approx 1.3 \times 10^{10}$, Shirtcliffe obtient $R_f \approx 0.58$, qui est une valeur très proche de $R_f \approx 0.534$ que nous obtenons avec nos nombres de Rayleigh les plus importants, c'est à dire $Rt \approx 7.6 \times 10^7$ et $Rs \approx 1.3 \times 10^8$ (essai 10). On peut donc penser raisonnablement, que s'il avait travaillé avec des nombres de Rayleigh du même ordre de grandeur que les nôtres, il aurait du même coup obtenu des valeurs de R_f encore plus voisines des nôtres.

La Fig. 16 montre l'évolution de R_f avec le temps correspondant à l'essai 10. On voit que ce rapport est alors loin d'être constant. Néanmoins, à partir des valeurs relevées, on peut donner la loi approchée : $R_f \approx 0.5462 + 0.0299t$. Nous avons estimé, qu'une erreur de l'ordre de 10% sur h_T/H , pouvait engendrer

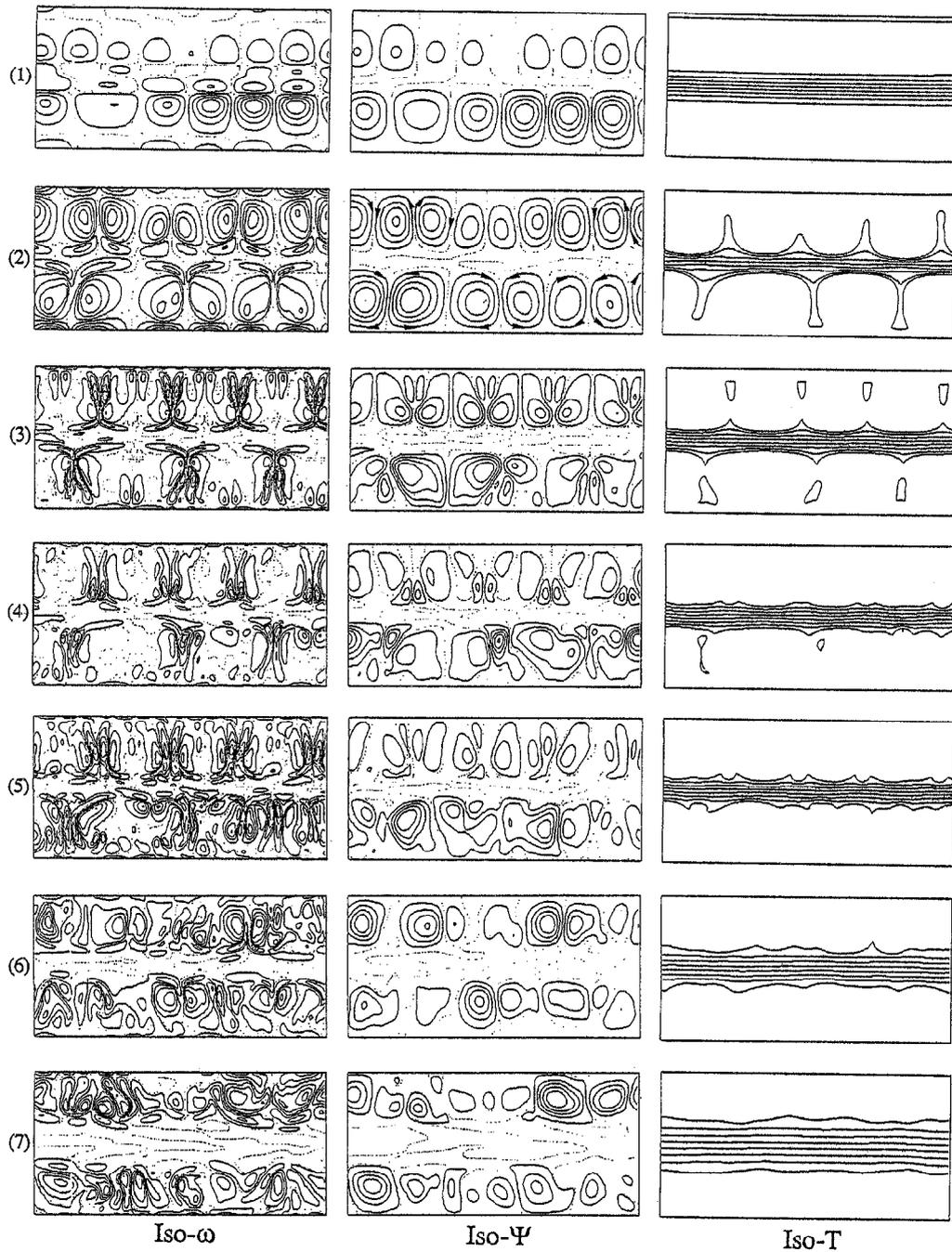


Fig. 11. Lignes d'iso- ω , d'iso- Ψ et d'iso- T correspondant à l'essai 7 du Tableau 1. (1) $t = 0.01125$: $\omega_{\max} = 162.6$, $\Psi_{\max} = 2.82$; (2) $t = 0.0125$: $\omega_{\max} = 20\,556.4$, $\Psi_{\max} = 389.9$; (3) $t = 0.01375$: $\omega_{\max} = 9173.9$, $\Psi_{\max} = 45.3$; (4) $t = 0.015$: $\omega_{\max} = 13\,604.0$, $\Psi_{\max} = 61.5$; (5) $t = 0.01625$: $\omega_{\max} = 6495.4$, $\Psi_{\max} = 50.2$; (6) $t = 0.05$: $\omega_{\max} = 5206.8$, $\Psi_{\max} = 55.2$; (7) $t = 0.1$: $\omega_{\max} = 2877.3$, $\Psi_{\max} = 34.5$.

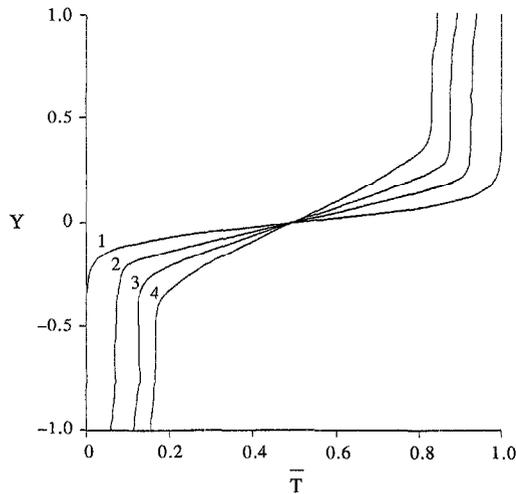


Fig. 12. Profils verticaux de la concentration moyenne (horizontale) de sel \bar{T} aux temps: (1) $t = 0$, (2) $t = 0.0305$, (3) $t = 0.062$, (4) $t = 0.101$. Essai 10 du Tableau 1.

au maximum une erreur de 20% sur R_f . Cette loi moyenne de R_f donne donc des valeurs très proches de celles trouvées par la méthode précédente.

La Fig. 17 donne les évolutions de Rat en fonction de t se rapportant aux essais 5 et 10. Shirtcliffe [6], montre que l'évolution de $\alpha \delta T$ en fonction du temps est à peu près linéaire si l'on se place en coordonnées logarithmiques. Si l'on compare ses courbes aux nôtres, on peut voir que dans l'intervalle de valeurs que l'on s'est fixé, on retrouve à peu près la même décroissance linéaire. Notons cependant, que nos graphes sont moins linéaires quand on s'approche de $t = 0.1$.

Les Figs. 18 et 19 montrent respectivement l'évolution du rapport R_g et celle de l'épaisseur h_T/H en fonction du temps adimensionnel t . Sur ces figures,

nous comparons les résultats correspondant à l'essai 10 avec ceux de la dernière expérience de Shirtcliffe [6]. La quantité R_g est notée F_{sc}/F_{TC} dans le tableau rapportant les résultats de cette expérience effectuée dans un récipient de hauteur $H = 3\text{ cm}$. Nous avons adimensionné les temps donnés par Shirtcliffe en les divisant par le temps de référence choisi pour nos calculs, à savoir $\tilde{t}^* = H^2/\kappa_T$. Linden et Shirtcliffe [11] à partir des données de Shirtcliffe [6] montrent que jusqu'aux temps où la mesure de l'interface est valide, l'épaisseur de cette dernière augmente linéairement avec le temps suivant la loi: $h_T/H = 2.983t$. On rappelle que pour l'essai 10 on a obtenu la loi: $h_T/H = 0.3073 + 3.1021t$. Ces deux dernières lois correspondent à la Fig. 19. L'essai 10 permet aussi d'obtenir la loi (valable après $t = 0.025$): $R_g = 0.6364 + 2.768t$. Les Figs. 18 et 19 permettent de constater que jusqu'au temps $t = 0.106$, les pentes des graphes se rapportant à notre essai et celles correspondant à l'expérience sont à peu près égales. Après le temps $t = 0.106$ l'épaisseur de l'interface devenait trop importante pour que les calculs soient significatifs. Au vu de ces figures, on remarque que les valeurs concernant l'essai 10 sont plus élevées. Ce décalage, est principalement lié à la différence entre l'épaisseur initiale de l'interface dans l'expérience réelle et celle de notre simulation numérique. Notons aussi que le processus de démarrage est différent dans les deux cas. En particulier, dans nos simulations, le fait de perturber dans tout le domaine contribue sûrement à créer plus tôt le mouvement de convection. Tout se passe comme si nos évolutions avaient subi une translation dans le temps par rapport à celles des expériences. Il est important de préciser que la première mesure donnée dans le tableau de Shirtcliffe correspond aux nombres de Rayleigh: $Rat = 7.6 \times 10^9$ et $Ras = 1.3 \times 10^{10}$. Ces nombres de Rayleigh sont donc 100 fois plus élevés que ceux que nous avons

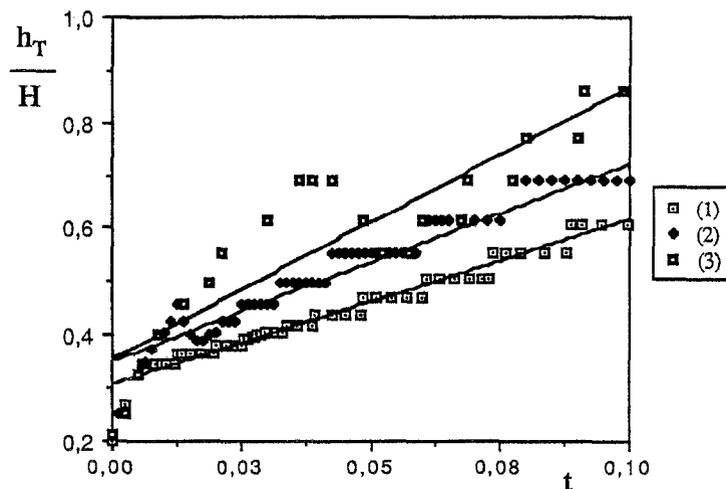


Fig. 13. Evolution de h_T/H en fonction du temps: (1) essai 10 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^7$ et $Rs = 1.3 \times 10^8$); (2) essai 5 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^6$ et $Rs = 1.3 \times 10^7$); (3) essai 3 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^5$ et $Rs = 1.3 \times 10^6$).

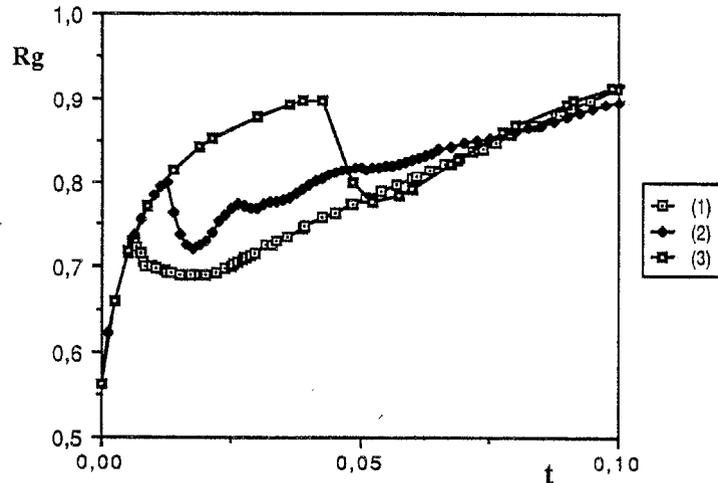


Fig. 14. Evolution de R_g en fonction du temps: (1) essai 10 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^7$ et $Rs = 1.3 \times 10^5$); (2) essai 5 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^6$ et $Rs = 1.3 \times 10^7$); (3) essai 3 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^5$ et $Rs = 1.3 \times 10^6$).

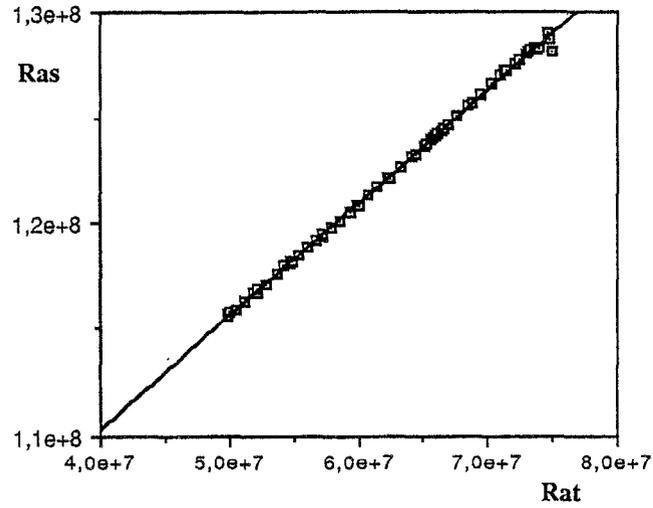
utilisés pour l'essai 10. Rappelons enfin que l'épaisseur de l'interface augmente d'autant moins vite que les nombres de Rayleigh sont importants.

La Fig. 20 donne l'évolution du flux de sel normalisé F_{\ddagger}^* , en fonction du rapport des densités R_ρ . Les graphes (1), (2) et (3) de cette figure se rapportent à trois de nos expériences numériques (essais 3, 5 et 10 du Tableau 1) qui ont toutes démarré avec une interface initiale épaisse. Pour le graphe (4), qui correspond à la dernière expérience de Shirtcliffe [6], nous avons normalisé les flux de sel qu'il donne dans la 6ième colonne de son tableau, de la même manière que dans nos calculs, c'est à dire en les divisant par le flux \tilde{F}_{SP} (15). Pour ce faire, nous avons pris $\rho_0 = 1 \text{ g cm}^{-2}$, $g = 981 \text{ cm s}^{-2}$, $\nu = 10^{-2} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ et $\kappa_T = 1.55 \times 10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. On constate que le graphe (4) a qualitativement la même décroissance que les graphes (1), (2) et (3). D'un point de vue quantitatif, les valeurs des flux correspondant au graphe (4), sont un peu plus faibles. On rappelle que les nombres de Rayleigh de l'expérience sont 100 fois plus élevés que les nôtres et que l'interface initiale est très différente. En fait, on peut remarquer que pour R_ρ fixé, les épaisseurs h_T/H de l'expérience sont deux à trois fois plus petite que les nôtres. Pour fixer les idées, si R_ρ égale 1.97, alors h_T/H vaut 0.43 pour le cas (1) de la Fig. 20, 0.55 pour le cas (2), 0.67 pour le cas (3) et 0.2 pour le cas (4). De plus, les résultats numériques montrent que pour un R_ρ donné, F_{\ddagger}^* décroît quand Rat et Ras augmentent, et que F_{\ddagger}^* décroît quand h_T/H augmente. On peut donc raisonnablement penser, que dans nos simulations, si l'on avait pu prendre une interface initiale plus fine et des nombres de Rayleigh 100 fois plus grands, nous aurions été très proches des résultats expérimentaux de la dernière expérience de Shirtcliffe. Dans nos calculs, nous avons estimé qu'une erreur de 10% sur h_T/H , pouvait créer au plus une erreur de

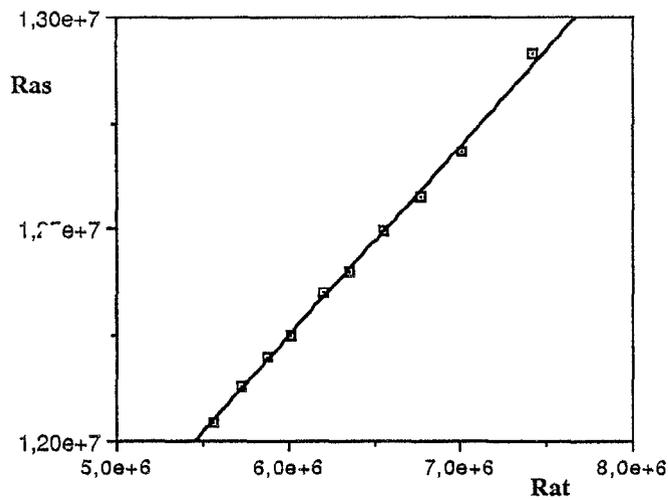
25% sur F_{\ddagger}^* et 0.7% sur R_ρ . Pour sa dernière expérience [graphe (4) sur la Fig. 20], Shirtcliffe utilisa un récipient tel que $H = 3 \text{ cm}$ et $L = 15 \text{ cm}$. Pour ses premières expériences il avait utilisé un réservoir plus important pour lequel $H = 5 \text{ cm}$ et $L = 60 \text{ cm}$. Pour toutes les expériences obtenues avec ce dernier récipient il donne une loi empirique moyenne $F_{\ddagger}^* = 2.59 R_\rho^{-12.6}$ qui est représentée par le graphe (5) sur la Fig. 20. On constate que les valeurs de F_{\ddagger}^* correspondantes deviennent rapidement 100 fois plus faibles que celles des cas (1), (2), (3) et (4) au fur et à mesure que R_ρ croît. Pour expliquer cette différence, notons tout d'abord que pour le calcul de cette loi, Shirtcliffe n'a pas tenu compte de toutes ses expériences. En effet, sur la Fig. 5 de son article où sont relevées les mesures de toutes ses expériences on voit bien que dans l'intervalle de R_ρ que nous considérons ici (c'est à dire $1.7 \leq R_\rho \leq 2.3$), il peut y avoir un rapport de plus de 10, entre deux valeurs de F_{\ddagger}^* , correspondant à un R_ρ fixé.

6. CONCLUSION

Le but de ce travail était de modéliser et d'étudier une interface *diffusive* en convection de double-diffusion. Pour cela, une méthode spectrale couplée à une technique de décomposition de domaine a été utilisée de manière à résoudre les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq. Cette méthode s'est trouvée bien adaptée à représenter avec précision, les zones intérieures de fort gradient qui apparaissent dans ce problème. Pour le modèle, nous avons considéré qu'à l'instant initial, le domaine de calcul était rempli par deux couches de fluide au repos, séparées par une interface. Ces deux couches ont des concentrations uniformes en sel et en sucre mais différentes d'une à l'autre. Nous avons mis en évidence



(a)



(b)

Fig. 15. (a) Evolution de Rat en fonction de Ras . Essai 10 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^7$ et $Rs = 1.3 \times 10^8$). La droite correspond à la loi: $Ras = 8.895 \times 10^7 + 0.5338Rat$ (approximation par la méthode des moindres carrés). (b) Evolution de Rat en fonction de Ras . Essai 5 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^6$ et $Rs = 1.3 \times 10^7$). La droite correspond à la loi: $Ras = 9.542 \times 10^6 + 0.451Rat$ (approximation par la méthode des moindres carrés).

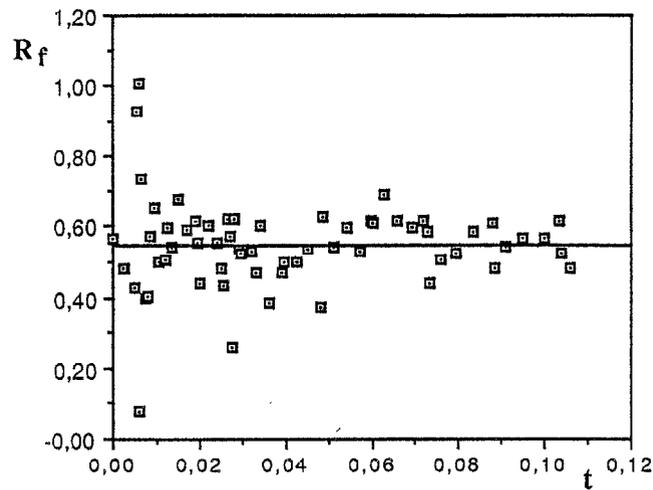


Fig. 16. Evolution de R_f en fonction du temps. Essai 10 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^7$ et $Rs = 1.3 \times 10^8$).

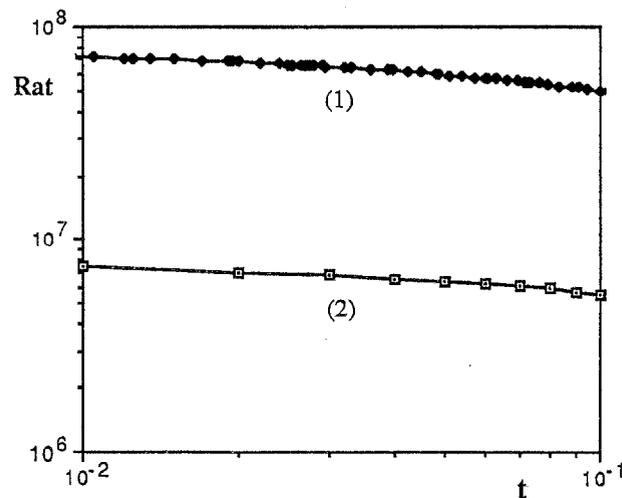


Fig. 17. Evolution de Rat en fonction du temps: (1) essai 10 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^7$ et $Rs = 1.3 \times 10^8$); (2) essai 5 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^6$ et $Rs = 1.3 \times 10^7$).

qu'en démarrant d'une condition initiale, pour le sel et le sucre, très faiblement perturbée de façon aléatoire, il pouvait apparaître dans les premiers instants un régime d'écoulement ayant une périodicité inférieure à celle qui est imposée par la modélisation. En partant d'un état initial où l'interface est plus fine, ou bien en augmentant les nombres de Rayleigh, l'écoulement fait apparaître des structures complexes dont la simulation numérique correcte nécessite l'emploi d'un très grand nombre de polynômes. Nos simulations les plus fines utilisaient 100 modes de Fourier et 150 modes de

Tchébychev. Pour la comparaison avec l'expérience nous nous sommes intéressés plus particulièrement à la dernière expérience de Shirtcliffe [6] car c'était la seule pour laquelle il donnait des profils de concentration de sel et de sucre ainsi que des valeurs bien précises, à différents instants, de diverses quantités telles que: les flux et les densités relatifs au sel et au sucre. Ainsi, nous avons pu constater un très bon accord qualitatif en ce qui concerne la forme des profils de sel, de sucre et de densité et leur évolution dans le temps. A propos du rapport des flux R_f , nous avons

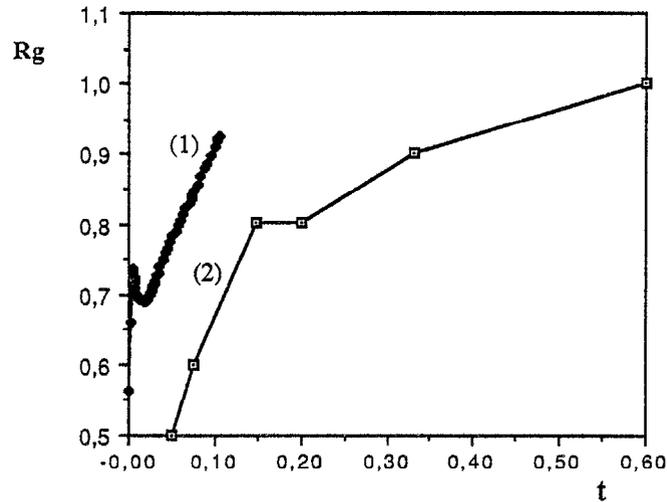


Fig. 18. Evolution de R_g en fonction du temps: (1) essai 10 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^7$ et $Rs = 1.3 \times 10^8$); (2) évolution d'après Shirtcliffe [6].

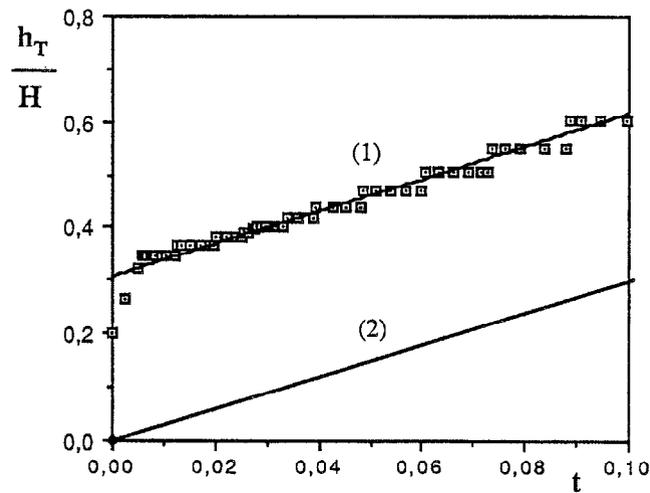


Fig. 19. Evolution de h_T/H en fonction du temps: (1) essai 10 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^7$ et $Rs = 1.3 \times 10^8$); (2) évolution d'après Linden et Shirtcliffe [11].

trouvé la valeur $R_f \approx 0.53$ pour notre essai le plus proche des expériences au lieu de $R_f \approx 0.58$ comme dans ces dernières. Pour les quantités comme le Rayleigh salin instantané Rat , le rapport des flux du aux gradients des concentrations dans l'interface R_g , l'épaisseur de l'interface h_T et le flux de sel normalisé F_T^* , les évolutions dans le temps sont très proches de celles de l'expérience d'un point de vue qualitatif, mais différentes quantitativement. Ceci est normal car dans le problème que nous avons traité, les valeurs de l'in-

terface initiale et des nombres de Rayleigh sont différentes de celles des expériences de Shirtcliffe. Le processus de démarrage est totalement différent.

Nos résultats montrent qu'une modélisation bidimensionnelle avec périodicité est correcte. Ainsi, à partir du modèle et des outils de calcul que nous avons construits, on pourrait envisager une étude plus approfondie, c'est à dire considérer une plus large gamme de paramètres physiques. Dans ce problème de l'interface, comme dans la plupart des problèmes

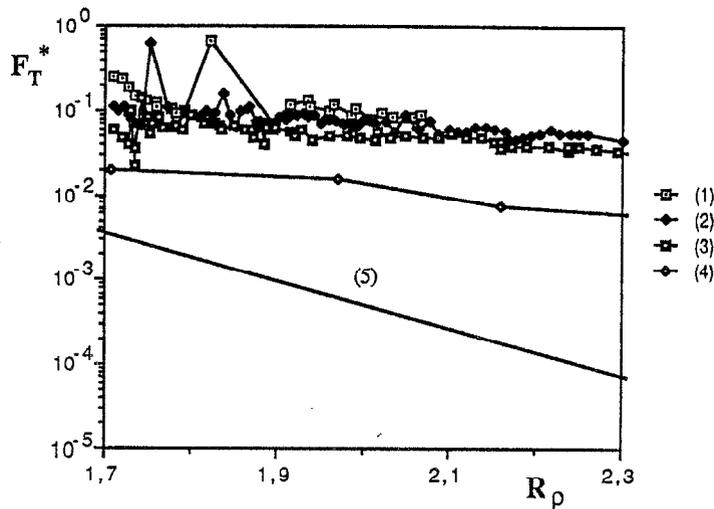


Fig. 20. Evolution de F_T^* en fonction de R_ρ : (1) essai 3 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^5$ et $Rs = 1.3 \times 10^6$); (2) essai 5 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^6$ et $Rs = 1.3 \times 10^7$); (3) essai 10 (état initial avec une interface épaisse, $Rt = 7.6 \times 10^7$ et $Rs = 1.3 \times 10^8$); (4) évolution correspondant à la dernière expérience de Shirtcliffe [6] (pour ce cas, les calculs des flux F_T^* ont été effectués, en normalisant les flux de sel donnés dans le Tableau 1 de l'article de Shirtcliffe, avec le flux \bar{F}_{SP} ; (5) graphe de la loi $F_T^* = 2.59 R_\rho^{-12.6}$ donnée par Shirtcliffe [6] pour les premières expériences qu'il cite dans son article.

de convection de double-diffusion, le champ d'investigation reste encore largement ouvert.

Remerciements—L'auteur souhaite remercier le conseil Scientifique du Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche qui lui a attribué les moyens de calcul (CRAY 2). Il remercie aussi vivement le Dr R. Peyret (Université de Nice) pour avoir encouragé et lu prudemment cet article.

REFERENCES

- H. E. Huppert and J. S. Turner, Double-diffusive convection, *J. Fluid Mech.* **106**, 299–329 (1981).
- J. S. Turner, Double-diffusive phenomena, *A. Rev. Fluid Mech.* **6**, 37–56 (1974).
- J. S. Turner, Multicomponent convection, *A. Rev. Fluid Mech.* **17**, 11–43 (1985).
- J. S. Turner, The coupled turbulent transports of salt and heat across a sharp density interface, *Int. J. Heat Mass Transfer* **8**, 759–767 (1965).
- T. G. L. Shirtcliffe, The development of layered thermosolutal convection, *Int. J. Heat Mass Transfer* **12**, 215–222 (1969).
- T. G. L. Shirtcliffe, Transport and profile measurements of the diffusive interface in double diffusive convection with similar diffusivities, *J. Fluid Mech.* **57**, 27–43 (1973).
- P. F. Crapper, Measurements across a diffusive interface, *Deep-Sea Res.* **22**, 537–545 (1975).
- G. O. Marmorino and D. R. Caldwell, Heat and salt transport through a diffusive thermohaline interface, *Deep-Sea Res.* **23**, 59–67 (1976).
- S. Takao and U. Narusawa, An experimental study of heat and mass transfer across a diffusive interface, *J. Heat Mass Transfer* **23**, 1283–1285 (1980).
- H. J. S. Fernando, The formation of a layered structure when a stable salinity gradient is heated from below, *J. Fluid Mech.* **182**, 525–541 (1987).
- P. F. Linden and T. G. L. Shirtcliffe, The diffusive interface in double-diffusive convection, *J. Fluid Mech.* **87**, 417–432 (1978).
- D. O. Gough and J. Toomre, Single-mode theory of diffusive layers in thermohaline convection, *J. Fluid Mech.* **125**, 75–97 (1982).
- S. M. Chang, S. A. Korpela and Y. Lee, Double diffusive convection in the diffusive regime, *Appl. Sci. Res.* **39**, 301–319 (1982).
- U. Ehrenstein and R. Peyret, A Chebyshev-collocation method for the Navier–Stokes equations with application to double-diffusive convection, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **9**, 427–452 (1988).
- J. M. Vanel, R. Peyret and P. Bontoux, A pseudo-spectral solution of vorticity-stream function equations using the influence matrix technique. In *Numerical Methods For Fluid Dynamics II* (Edited by K. W. Morton and M. J. Baines), pp. 463–475. Clarendon Press, Oxford (1986).
- D. Gottlieb and S. A. Orszag, *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*, CBMS–NSF, Regional Conference Series in Applied Mathematics, Siam (1977).
- J. M. Lacroix, R. Peyret and J. P. Pulicani, A pseudo-spectral multi-domain method for the Navier–Stokes equations with application to double-diffusive convection, 7th GAMM Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Louvain-La-Neuve, 9–11 September, 1987.
- J. P. Pulicani, Application des méthodes spectrales à l'étude d'écoulements de convection, Thèse, Université de Nice (1988).
- J. P. Pulicani, A spectral multi-domain method for the solution of 1D-Helmholtz and Stokes-type equations, *Comput. Fluids* **16**, 207–215 (1988).
- L. Kleiser and U. Shumann, Treatment of incompressibility and boundary conditions in 3-D numerical simulations of plane channel flows, In *Proceedings of 3rd GAMM Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics* (Edited by E. H. Hirschel), pp. 165–173. Vieweg, Braunschweig (1980).
- Y. Demay, J. M. Lacroix, R. Peyret and J. M. Vanel, Numerical experiments on stratified fluids subject to heating, Third International Symposium on Density-Stratified Flows, Pasadena, 3–5 February (1987).

NUMERICAL ISOTHERMAL MODEL FOR A DIFFUSIVE
INTERFACE IN DOUBLE-DIFFUSIVE CONVECTION

A spectral method coupled with a multi-domain technique is used to model a diffusive interface in double-diffusive convection. The isothermal model involves two horizontal Boussinesq fluid layers with a uniform sugar and salt concentration which are separated with a thin interface. A reasonable agreement has been found by comparing the numerical results with the experimental and theoretical ones.